

MONOGRAFIES DE LES SECCIONS DE CIÈNCIES, XXV

Einstein i l'actualitat de les seves contribucions

ANTONI ROCA ROSELL (coord.)



Institut
d'Estudis
Catalans

SECCIÓ
DE CIÈNCIES
I TECNOLOGIA

Einstein i l'actualitat de les seves contribucions

Einstein i l'actualitat de les seves contribucions

ANTONI ROCA ROSELL (coord.)

Barcelona, 2025



Institut
d'Estudis
Catalans

SECCIÓ
DE CIÈNCIES
I TECNOLOGIA

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Einstein i l'actualitat de les seves contribucions. — Primera edició. —

(Monografies de les seccions de ciències ; 25)

Bibliografia. — Textos en català i castellà

ISBN 9788499657981

I. Roca Rosell, Antoni, editor literari II. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia.

III. Col·lecció: Monografies de les seccions de ciències ; 25

1. Einstein, Albert, 1879-1955 — Crítica i interpretació 2. Einstein, Albert, 1879-1955 — Influència

1Einstein, Albert

© dels textos, els seus autors

© 2025, Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: octubre de 2025

Text revisat lingüísticament per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imatge de la coberta: Einstein a l'escullera de Barcelona. Fotografia cedida per la família Terradas.

Compost per Fotoletra, SL

Imprès a Service Point FMI, SA

ISBN: 978-84-9965-798-1

Dipòsit Legal: B 12553-2025



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de Creative Commons. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

Taula

Introducció, <i>per Antoni Roca Rosell</i>	7
La curvatura de l'espai, <i>per Carme Jordi</i>	9
Entre dos mitos: Einstein y el método científico, <i>per Luis Navarro Veguillas</i>	21
Einstein i les matemàtiques, <i>per Sebastià Xambó Descamps</i>	43
<i>La relativitat a l'abast de tothom: valor actual de les idees d'Einstein sobre la història, l'ensenyament i la comunicació de la física,</i> <i>per Xavier Roqué</i>	77
La influència d'Einstein en l'anàlisi estocàstica, <i>per Marta Sanz-Solé</i>	85

Introducció

Antoni ROCA ROSELL
Secció de Ciències i Tecnologia
Institut d'Estudis Catalans

Per commemorar el centenari del curs que Einstein va impartir a Barcelona durant la seva estada del 22 de febrer a l'1 de març de 1923, l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) i altres institucions organitzaren diversos actes entre el 2023 i el 2024. A l'Institut, una activitat pública de relleu fou una exposició al claustre de la Casa de Convalescència. L'exposició estigué oberta, en un primer període, des del 3 de març fins al 26 d'abril de 2023. En un segon període, des del 16 d'octubre de 2023 fins a l'11 de gener de 2024, s'organitzaren visites guiades a càrrec de l'associació eXplorium. Vàrem comptar 47 grups escolars, amb un total de 1.271 estudiants, fonamentalment, de batxillerat; també hi hagué 21 visites amb públic general, amb un total de 94 persones. L'organització de l'exposició guià almenys cinc visites més, amb aproximadament cinquanta persones. A més, cal dir que el personal de l'IEC ha vist passar un seguit de visitants lliures que no han deixat de fluir durant tot el període. L'exposició tindrà una versió en línia en el web de l'IEC.

Al mateix temps, convocàrem a l'IEC experts en diferents camps per reflexionar sobre la figura d'Einstein i l'actualitat de les seves contribucions. Aquestes reflexions tingueren lloc el 3 de març de 2023 i el 16 de gener de 2024, i se'n pot seguir el desenvolupament al canal de vídeos de l'IEC.¹

Einstein ha assolit una posició singular en la ciència del nostre temps, tant per les seves contribucions com per la figura cívica que ha projectat. És clar que les contribucions d'Einstein s'han anat matisant, complementant, superant, en els debats en què participà (per exemple, sobre la nova mecànica quàntica), i, com és natural, en els anys posteriors a la seva mort el 1955. D'altra banda, Einstein s'implicà en la lluita per la igualtat i per la pau al món, cosa que els seus col·laboradors

1. <https://www.youtube.com/@comunicacioiec/videos>.

més propers difongueren i, en certa manera, exageraren (sobretot, quan s'insinuava que Einstein no era deutor del seu temps). De tota manera, la disponibilitat del seu arxiu personal i el procés d'edició dels seus *Collected Papers* ens donen l'oportunitat de contrastar la seva figura amb documents, cosa que ha donat lloc a un gran nombre d'estudis crítics arreu del món.

En aquest volum, incloem uns treballs que foren presentats a les jornades organitzades per l'IEC en els quals els autors ens ofereixen una aproximació més acurada a les seves anàlisis.

La curvatura de l'espai

Carme JORDI
Secció de Ciències i Tecnologia
Institut d'Estudis Catalans

1. INTRODUCCIÓ

Amb motiu de la inauguració de l'exposició «100 anys d'Einstein a Catalunya», de l'Institut d'Estudis Catalans, es va organitzar la jornada *Einstein i l'actualitat de les seves contribucions*. En aquest marc, la ponència «La curvatura de l'espai» aborda una de les prediccions de la teoria general de la relativitat: que la distribució de massa a l'espai modela la seva geometria, la seva curvatura. Com a conseqüència d'això, la trajectòria de la llum segueix les deformacions de l'espai provocades per les masses properes al camí des que la llum surt de l'emissor fins que arriba a l'observador.

La mesura de les posicions d'estrelles situades darrere i al voltant del Sol durant l'eclipsi solar total de 1919 va permetre fer la primera comprovació observacional de la predicció d'Einstein pel que fa a la curvatura de les trajectòries de la llum. Evidentment, això va consolidar l'acceptació de la teoria general de la relativitat per part de la comunitat científica. Després de 1919, hem obtingut moltes més proves observacionals de la curvatura de l'espai utilitzant diferents tècniques i diferents longituds d'ona. La curvatura provoca fenòmens com ara les lents gravitatòries, que, combinades amb la precisió de les mesures a la Terra o a l'espai mitjançant els instruments més actuals, permeten observar galàxies molt llunyanes o inferir la presència d'exoplanetes al voltant d'altres estrelles, per posar-ne uns quants exemples.

Aquest article se centra en la part observacional de la curvatura de l'espai, com s'ha comprovat i quines són les mesures més actuals.

2. ELS PRIMERS PASSOS

La llei de la gravitació universal publicada per Isaac Newton el 1687, en els seus *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, descriu la força que s'exerceixen dos cossos mútuament per la massa que contenen i la distància que els separa. En contraposició, la teoria general de la relativitat d'Albert Einstein, publicada el 1915, planteja la gravetat integrada en l'espai i el temps mateix, de manera que les masses escampades en l'espai i el temps en modelen la geometria, no tan sols des d'un punt de vista global sinó també local. Si ens imaginem un espai de dues dimensions, com ara una làmina elàstica, per exemple (vegeu la figura 1), les diferents masses situades en la làmina provoquen deformacions (curvatures) més grans com més massa té el cos en qüestió. Aquesta deformació força que tota partícula que viatja en l'espai i el temps (i, també, la llum) es vegi obligada a seguir la forma modelada per les masses presents. Les trajectòries no són, doncs, rectilínies, sinó corbades. Les trajectòries són geodèsiques (de mínima longitud) en aquest espai i el temps deformat. La posició aparent d'una estrella (o qualsevol altre objecte celeste) vista per un observador no és la posició real si la llum troba deformacions durant la seva trajectòria. D'aquest efecte se'n diu «deflexió de la llum». Tot i que la teoria general de la relativitat es va publicar el 1915, Einstein ja va anunciar la curvatura de l'espai i el temps el 1913.

El 1911, Einstein va suggerir que l'existència d'aquesta deflexió es podia comprovar durant un eclipsi total de Sol i va esperar que la comunitat científica a comprovar-ho. En aquell moment, basant-se en el principi d'equivalència de la teoria de la relativitat especial, va predir una desviació de la llum de 0,83 segons d'arc si la llum passa arran del limbe del Sol. Va ser el 1915, amb la teoria general

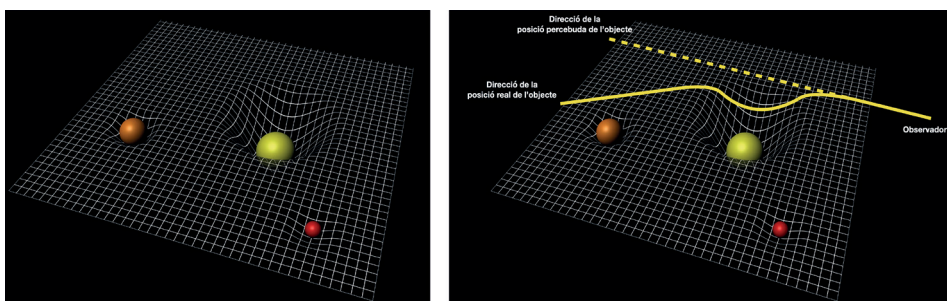


FIGURA 1. A l'esquerra, les masses presents a l'espai el deformen, talment com si fossin boletes pesades que provoquen deformacions en una làmina elàstica. A la dreta, la llum que es propaga per l'espai (la làmina) es veu obligada a seguir les deformacions i les trajectòries es corben (deflexió de la llum).

FONT: A l'esquerra, ESA - C. CARREAU, «Spacetime curvature» (en línia), <https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2015/09/Spacetime_curvature>. A la dreta, adaptació de l'autora a partir de la imatge de l'esquerra.

de la relativitat, que va adonar-se que el valor havia de ser el doble, 1,75 segons d'arc, segons la fórmula:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b},$$

en què α és l'angle de desviació, G la constant universal de la gravitació, M la massa del cos que deforma l'espai, b el paràmetre d'impacte o distància de la trajectòria de la llum al centre de la massa M , i c la velocitat de la llum en el buit. En el cas de llum rasant respecte del limbe, el paràmetre d'impacte b és el radi del Sol.

De fet, Einstein no va ser el primer de suggerir l'existència de la deflexió de la llum. El mateix Isaac Newton, en els seus tractats d'òptica, ja proposava que la llum sofreix una deflexió quan passa prop d'un cos massiu si es considera la llum com una partícula. Henry Cavendish, el 1784, i Johann Georg von Soldner, el 1801, van calcular un valor de 0,83 segons d'arc per a aquesta deflexió, però sense relacionar-ho amb la curvatura de l'espai. El primer valor calculat per Einstein coincidia, doncs, amb les prediccions anteriors de Cavendish i Von Soldner.

La Royal Astronomical Society britànica va organitzar dues expedicions a Sobral, al Brasil, i a l'illa de Príncipe, al golf de Guinea, per observar l'eclipsi total de Sol del 29 de maig de 1919, liderades per Arthur S. Eddington i Frank W. Dyson. Es tracta del primer eclipsi total que es produïa després de la publicació de les prediccions d'Einstein i després de la fi de la Primera Guerra Mundial. L'eclipsi va durar quasi set minuts i el Sol estava situat a la constel·lació de Taure, prop del cúmul de les Híades, amb prou estrelles brillants al voltant per pensar que l'experiment podia ser favorable.

Eddington i Dyson van presentar les mesures de les distàncies relatives entre les estrelles en presència del Sol (en el moment de l'eclipsi) i sense el Sol (en un altre moment de l'any sense eclipsi) a la Royal Astronomical Society el novembre de 1919, i les van publicar el 1920 (Dyson, Eddington i Davidson, 1920). Els resultats són: 1) hi ha un canvi en les distàncies relatives entre estrelles en funció de si el Sol és a la trajectòria de la llum o no hi és, i, per tant, la deflexió de la llum existeix, i 2) el valor que es dedueix de les observacions concorda amb el que prediu la teoria general de la relativitat. Tot i que alguns científics dubtaven de les mesures (per alguns núvols que hi havia a l'illa de Príncipe i pel desenfocament en un dels telescopis de Sobral) i tot i la possible presència d'errors sistemàtics en l'anàlisi de les fotografies, la comunitat científica va acceptar majoritàriament aquest resultat com a prova de la validesa de les prediccions d'Einstein. La premsa se'n va fer prou ressò amb titulars com ara «Einstein theory triumphs» («La teoria d'Einstein triomfa») (*The New York Times*, 10 novembre 1919).

Després de l'eclipsi de 1919, es va repetir l'experiment en eclipsis posteriors (cal destacar els de 1922, 1953 i 1973), en què el nombre d'estrelles era més elevat.

Els resultats obtinguts coincidien totalment amb els primers d'Eddington. No hi ha esclatxes per a dubtes, doncs!

3. MÉS EVIDÈNCIES OBSERVACIONALS

La deflexió de la llum depèn de la massa del cos present en la trajectòria i de la distància entre la trajectòria de la llum i aquest cos, tal com es descriu a la fórmula de més amunt. Com menys massa, menys curvatura de l'espai. Com més lluny del cos, menys curvatura de l'espai. Si en el cas del Sol estem parlant d'una desviació d'1,75 segons d'arc quan la llum passa rasant respecte del limbe, en el cas de Júpiter ($M_J = 1/1047 M_\odot$; $R_J = 0,10045 R_\odot$) estem parlant de 16 mil·lèsimes de segon d'arc, un factor aproximadament 110 vegades menor. En el cas de Saturn, la deflexió és de només 6 mil·lèsimes de segon d'arc pel que fa a la llum rasant.

Mesurar angles tan petits des de la Terra només és possible amb tècniques d'interferometria, i especialment amb radiofreqüències. Utilitzant la xarxa VLBI (de l'anglès *very long base interferometer*), que combina mesures fetes amb antenes de ràdio situades en diferents continents, Treuhaft i Lowe (1991) van mesurar la posició de la radiofont P0201+113 durant 4 hores el 21 de març de 1988, quan Júpiter era a una distància d'aproximadament $10 R_J$ (200 segons d'arc) en la projecció al cel. Van repetir les observacions el 2 d'abril de 1988, quan Júpiter ja era lluny de la radiofont. Si la llum rasant respecte del limbe de Júpiter es desvia 16 mil·lèsimes de segon d'arc, a una distància deu vegades superior, la desviació predita és només de 0,3 mil·lèsimes de segon d'arc. Els instruments emprats van permetre obtenir mesures amb una precisió de 0,16 mil·lèsimes de segon d'arc i rebutjar amb un 99,999 % de probabilitat la no coincidència amb la predicció de la teoria general de la relativitat. Aquesta va ser la primera mesura de la curvatura de l'espai amb radiofreqüències i, alhora, va ser una altra constatació de la validesa d'aquesta teoria.

Utilitzant també la xarxa VLBI, Lebach *et al.* (1995) van mesurar, l'octubre de 1987, les posicions de les radiofonts extragalàctiques 3C273B i 3C279 durant deu dies al voltant de l'ocultació de 3C279 pel Sol i van fer servir com a referència 3C273B, situada a una distància angular de 10 graus. El valor deduït per a la deflexió va ser de $0,9998 \pm 0,0008$ vegades el valor predit per la teoria general de la relativitat. Una altra corroboració, doncs.

4. LENTS GRAVITATÒRIES

En relació amb aquesta deflexió de la llum, el 1912 Einstein va plantejar les primeres idees sobre l'existència de múltiples imatges d'un mateix objecte real amb

llum que arriba a l'observador havent seguit trajectòries diferents perquè en el camí s'interposa un cos massiu (vegeu la figura 2). Aquest cos actua corbant l'espai i, per tant, les trajectòries de la llum. En lents òptiques convergents la trajectòria de la llum es corba de manera semblant per efecte de la refracció de la llum en la lent. Per aquesta similitud, l'efecte de la curvatura de la trajectòria de la llum per la presència d'un cos massiu s'ha anomenat *lent gravitatòria*.

En presentar les seves idees, Einstein comentava que és molt improbable que des de la Terra es puguin tenir estrelles prou alineades per observar l'efecte de lent i, per això, era molt reticent a publicar les seves prediccions. No ho va fer fins al 1936 (Einstein, 1936) i, en la publicació, hi deixa ben clar que ho fa a petició del seu company Rudi W. Mandl. En la publicació també diu:

Of course, there is no hope of observing this phenomenon directly. First, we shall scarcely ever approach closely enough to such a central line. Second, the angle β will defy the resolving power of our instruments.

Einstein no confia gens en la detecció d'aquest efecte, però prediu que, si hi ha aquesta alineació, s'ha d'observar un augment de la brillantor aparent de l'objecte en qüestió. Tornarem a això més endavant.

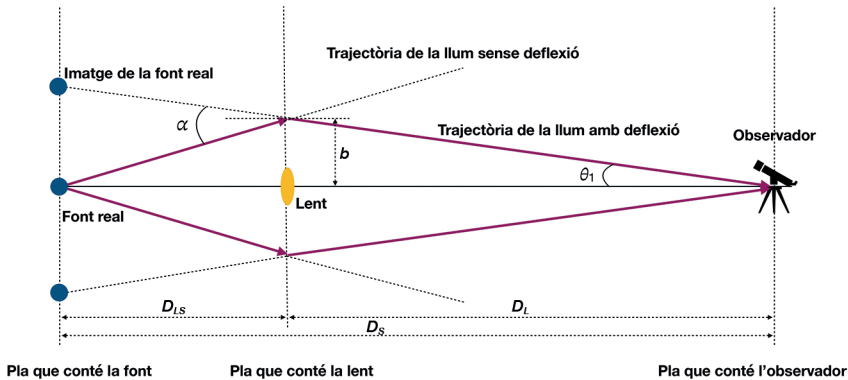


FIGURA 2. Efecte de lent gravitatòria en cas d'una alineació perfecta entre l'objecte real, l'objecte que actua com a lent i l'observador. A l'observador li arriba llum provinent d'una font real, però que segueix camins diferents per la presència d'un cos que actua com a lent gravitatòria. L'observador veu més d'una imatge de la font real, veu més d'un objecte, tot i que només n'existeix un. Si l'alineació entre la font real, la lent i l'observador no és perfecta, la longitud dels camins recorreguts per la llum per crear les diferents imatges pot ser diferent.

FONT: Elaboració pròpia.

Però les coses canvien al cap d'unes quantes dècades amb el descobriment dels quàsars, al final de la dècada de 1950. Es tracta de galàxies amb nuclis actius molt lluminosos, tan lluminosos que dominen la llum de tota la galàxia i atorguen una aparença quasi puntual (quàsar = quasi estrella). Ràpidament, es va fer ressuscitar la idea de les lents gravitatòries. En ser tan lluminosos, són els objectes més llunyans que podem observar, i la probabilitat que la seva llum passi a prop d'una galàxia abans d'arribar a la Terra no és tan negligible com Einstein pensava pel que fa a l'alineació fortuïta de dues estrelles vistes des de la Terra. A més, ara no es tracta d'una estrella que actua com a lent, sinó que l'efecte de lent el fa una galàxia molt més massiva que una estrella, i les imatges creades estan més separades entre elles i són més fàcils de resoldre de manera angular. Això obria noves perspectives.

La figura 2 mostra el cas d'alineació perfecta entre l'objecte, la lent i l'observador. D_L , D_{LS} i D_S són les distàncies entre l'observador i la lent, entre la lent i la font real, i entre l'observador i la font real, respectivament. La variable b és el factor d'impacte, la distància entre el raig de llum i el centre de masses de la lent. La variable α és la deflexió de la llum predita per la teoria general de la relativitat i expressada per la fórmula de més amunt. Si considerem la font real i la lent com a objectes puntuals, la separació angular entre la posició real de la font i les seves imatges, θ_1 , ve donada per

$$\theta_1 = \left(\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \right)^{1/2}.$$

Cal dir que, depenent de la forma, la massa, les distàncies i l'alineació de la font llunyana i la lent, podem obtenir imatges dobles, triples o quàdruples, anells o arcs (vegeu la figura 3).

La primera confirmació arriba el 1979 amb l'observació del quàsar bessó SBS 0957+561, situat a $9 \cdot 10^9$ anys llum de distància (Walsh, Carswell i Weymann, 1979). Es tracta de la doble imatge d'aquest quàsar creada per la galàxia YGKOW G1, situada més a prop, a $4 \cdot 10^9$ anys llum de distància, que actua com a lent gravitatòria (vegeu la figura 3). A continuació se'n van anar identificant més casos. El 1985 es va descobrir la primera imatge quàdruple (creu d'Einstein) d'un quàsar llunyà, el QSO 2237+030, situat a $8 \cdot 10^9$ anys llum de distància, creada per la galàxia ZW 2237+030, situada a 400 milions d'anys llum (Huchra *et al.*, 1985). La mida angular de la creu d'Einstein és només d'1,6 segons d'arc $\times$ 1,6 segons d'arc (vegeu la figura 3).

Buscar imatges múltiples, arcs o anells és com buscar una agulla en un paller. On els hem de buscar? Lògicament, les alineacions són més probables en zones amb molta densitat de galàxies, com és el cas dels cúmuls i els supercúmuls de galàxies (vegeu la figura 3, a baix a la dreta).

Per posar-ne un exemple, des del primer descobriment el 1985, s'han anat afegint a la llista una cinquantena de creus d'Einstein més. Recentment, n'hi hem

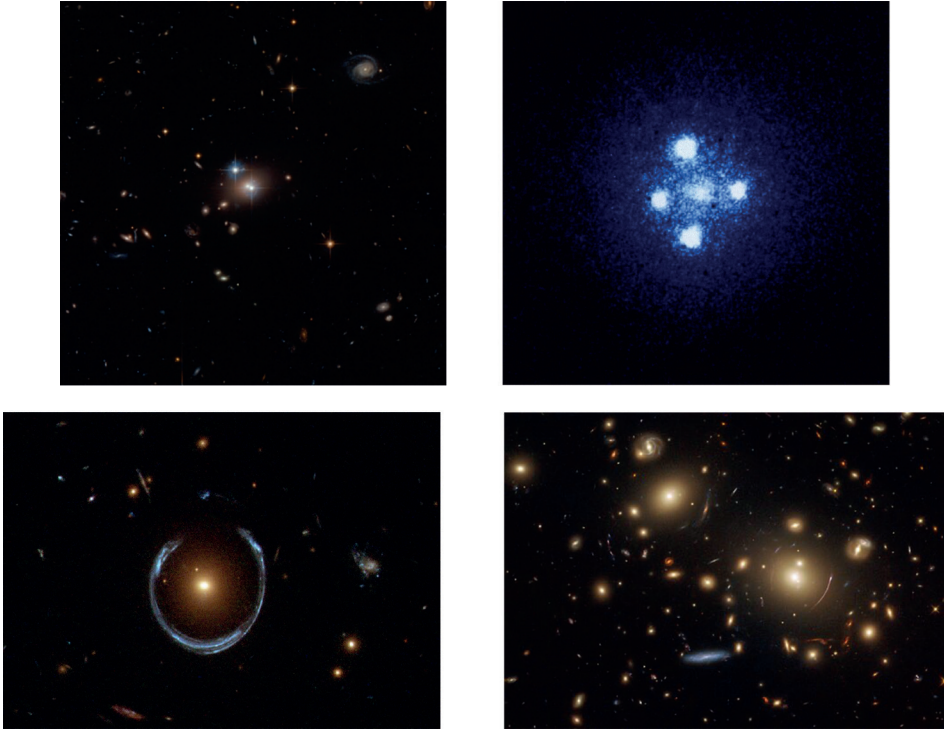


FIGURA 3. A dalt a l'esquerra, el quàsar bessó QSO SBS 0957+561. A la part central de la imatge es pot veure la galàxia YGKOW G1, que actua com a lent gravitatòria. La separació entre les imatges és de 6 segons d'arc. A dalt a la dreta, la creu d'Einstein del quàsar Q2237+030 o QSO 2237+0305, creada per la galàxia central ZW 2237+030. Les dimensions de la creu són d'1,6 segons d'arc $\times$ 1,6 segons d'arc. A baix a l'esquerra, l'anell d'Einstein creat per la galàxia vermella LRG 3-757 d'una galàxia blava més allunyada amb una alineació quasi perfecta. A baix a la dreta, el sistema de lents SDSS J0928+2031, en què el cúmul de galàxies més proper crea imatges distorsionades de les galàxies que són darrere del cúmul.

FONT: A dalt a l'esquerra, ESA/HUBBLE i NASA, «QSO B0957+0561», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:QSO_B0957%2B0561.jpg>, sota llicència Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>. A dalt a la dreta, NASA, ESA i STScI, «Einstein cross», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Einstein_cross.jpg>, de domini públic. A baix a l'esquerra, adaptació de Bullwersator, a partir d'ESA/HUBBLE i NASA, «A horseshoe Einstein Ring from Hubble», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A_Horseshoe_Einstein_Ring_from_Hubble.JPG>, de domini públic. A baix a la dreta, ESA/HUBBLE i NASA, M. GLADDERS *et al.*, reconeixement: Judy Schmidt, «Peering into the past SDSS J0928+2031», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peering_into_the_past_SDSS_J0928%2B2031.jpg>, sota llicència Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.

afegit dotze de cop, un augment d'un 20 % (Stern *et al.*, 2021). Per comprovar que les quatre imatges de la creu corresponen realment a imatges múltiples, els autors van realitzar observacions espectroscòpiques des de la Terra per assegurar que procedien del mateix objecte. L'increment tan ràpid del nombre de casos coneguts es deu a la missió espacial *Gaia*¹ de l'Agència Espacial Europea (*Gaia* Collaboration, Prusti *et al.*, 2016), i és perquè *Gaia* observa tot el cel sencer amb una resolució angular sense precedents. És, doncs, una màquina de descobriments i s'espera que en les properes publicacions de dades s'aportin centenars de casos més.

El descobriment de les lents gravitatòries ha permès constatar la validesa de la teoria general de la relativitat i, alhora, ha obert noves maneres d'estudiar l'Univers. Posem-ne un exemple. Tal com hem dit, la curvatura de l'espai depèn de la massa de la lent. Doncs bé, la mesura de la separació entre imatges del cos llunyà ofereix una manera de deduir la massa de la lent, que es compon no tan sols de matèria bariònica (estrelles, planetes, medi interestel·lar, etc.), sinó també de matèria fosca (la naturalesa de la qual encara no coneixem). Les lents gravitatòries ofereixen una manera de mesurar la quantitat de matèria fosca continguda en les galàxies i la seva distribució espacial.

Donem un altre exemple. Els quàsars són objectes de lluminositat variable i el senyal de la variabilitat (augment i/o disminució en un moment donat) triga un temps a arribar-nos a la Terra pel fet que la velocitat de la llum és finita. Si la llum ens arriba per camins diferents perquè hi ha una lent interposada en el camí, no veurem la variació de manera simultània en totes les imatges del quàsar. Com més llarg sigui el camí, més trigarà a arribar-nos. A partir d'aquestes diferències de temps entre la variabilitat de les imatges, es pot deduir el valor de la constant de Hubble-Lemaître, que correspon al ritme actual d'expansió de l'Univers.

5. MICROLENTS GRAVITATÒRIES

Tot i que la probabilitat que les estrelles s'alineïn no és gaire elevada, sí que pot ocórrer. Podem pensar en múltiples escenaris: lents que són estrelles simples, lents que són estrelles binàries, lents que contenen estrelles amb planetes i/o satèl·lits (llunes) i objectes llunyans que són una estrella simple, binària, amb planetes i/o satèl·lits o sense.

En aquests casos, la separació entre les diverses imatges d'un objecte real creades per la lent són molt properes entre elles i difícilment observables com a imat-

1. <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia>.

ges separades. Els instruments d'observació no tenen prou resolució angular, tal com ja deia Einstein quan va accedir a publicar les seves prediccions el 1936. Però sí que es pot observar fàcilment un increment de la lluentor aparent de l'objecte real (tal com deia Einstein), perquè en el moment que tenim l'alineació amb la lent ja no en veiem només una imatge, sinó dues o més, i la lluentor que observem és la suma de les lluentors de les diferents imatges. La figura 4 mostra el cas d'una lent composta per una estrella i un planeta que transita per davant d'una estrella més llunyana. Durant l'estona del trànsit es produeixen imatges múltiples de l'estrella llunyana creades per l'estrella més propera i el seu planeta. La mateixa figura també mostra el cas real d'OGLE-2005-BLG-390 ocorregut el 2005. La publicació DR3 de *Gaia* inclou 363 casos de microlents (de diverses configuracions), 90 dels quals són descobriments nous (Wyrzykowski *et al.*, 2023).

Aquest aparent augment temporal de la llum rebuda d'una estrella ha permès de descobrir l'existència d'aproximadament tres-cents exoplanetes, i segur que en un futur se'n descobriaran més a partir de missions espacials i projectes a la Terra especialment dedicats al monitoratge de la llum de les estrelles i la seva variació.

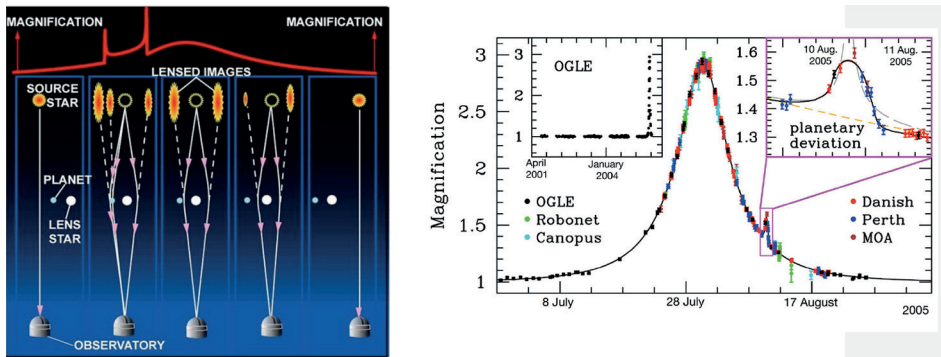


FIGURA 4. A l'esquerra, l'esquema del fenomen de microlent creat per una lent composta d'una estrella i un planeta. Quan la lent transita per davant de l'estrella llunyana (a la figura ho fa de dreta a esquerra), es creen imatges múltiples molt poc separades entre elles i que es perceben com una sola imatge de més brillantor. A la dreta, variació de la brillantor aparent en el cas de microlent OGLE-2005-BLG-390. Els punts corresponen a les observacions, i les línies, a models teòrics. Es pot veure l'increment de llum causat per l'estrella propera i també l'augment de llum creat pel seu planeta.

FONT: A l'esquerra, Dave Bennett. A la dreta, ESO, «Light curve of OGLE-2005-BLG-390» (en línia), <<https://www.eso.org/public/spain/images/eso0603b/?lang>>, sota llicència Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.

6. ESTIRANT MÉS LA CORDA

Mentre dura el fenomen de microlent, la llum que percebem està composta per les diverses imatges creades, tal com hem comentat abans. Però hi ha un ingredient més, i és que la posició de l'estrella llunyana percebuda és la del fotocentre de les diverses imatges creades. Durant el trànsit, les imatges van canviant de posició i lluentor aparent, i, per tant, la posició del fotocentre també canvia. Ara bé, aquesta variació és realment petita i calen mesures d'una precisió extrema per observar-les. I aquí entra en joc un altre cop el satèl·lit *Gaia*, que és capaç de mesurar angles amb precisions de 10 milionèsimes de segon d'arc. La segona microlent descoberta per *Gaia*, anomenada *Gaia16aye*, va ocórrer el novembre de 2016. En aquest cas, la lent és una estrella binària. S'ha analitzat la posició de l'estrella llunyana durant el fenomen de la microlent, i s'observa que les posicions no segueixen un model de moviment d'estrella simple. Només quan s'assumeix que la llum és desviada per una lent doble, es pot modelar amb molta precisió les diverses posicions aparents observades, arribant a residus de poques mil·lèsimes de segon d'arc.²

7. CONCLUSIONS

L'existència de la curvatura de l'espai està ben establerta des del punt de vista teòric i corroborada de manera observacional. No s'ha trobat, de moment, cap cas que no concordi amb la teoria general de la relativitat.

L'existència de la curvatura de l'espai, i, en conseqüència, de la deflexió de la llum i els fenòmens de lents i microlents gravitatòries, ha permès detectar estrelles múltiples, exoplanetes i quàsars amb un desplaçament cap al roig molt elevat (molt llunyans), mesurar masses de galàxies (i inferir-ne la matèria fosca) i contribuir a determinar el valor de la constant de Hubble-Lemaître.

En els propers anys i dècades les dades de missions espacials i projectes a la Terra, tant actuals com futurs, aportaran un munt de dades més i amb mesures molt precises, tant pel que fa a les posicions com a les lluentors aparents. La curvatura de l'espai predita per Einstein és, doncs, plenament actual.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. (1920). «A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29,

2. Per a més informació, vegeu https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/iow_20210924.

- 1919». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London: Series A: Containing Papers of a Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 220, núm. 571-581, p. 291-333.
- EINSTEIN, A. (1936). «Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field». *Science* [en línia], vol. 84, núm. 2188, p. 506-507. <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.84.2188.506>>.
- GAIA COLLABORATION, PRUSTI, T. [et al.] (2016). «The *Gaia* mission». *Astronomy & Astrophysics* [en línia], vol. 595, art. núm. A1. <https://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2016/11/aa29272-16/aa29272-16.html>.
- HUCHRA, J.; GORENSTEIN, M.; KENT, S.; SHAPIRO, I.; SMITH, G.; HORINE, E.; PERLEY, R. (1985). «2237+0305: A new and unusual gravitational lens». *The Astronomical Journal* [en línia], vol. 90, p. 691-697. <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985AJ.....90..691H/abstract>>.
- LEBACH, D. E.; COREY, B. E.; SHAPIRO, I. I.; RATNER, M. I.; WEBBER, J. C.; ROGERS, A. E. E.; DAVIS, J. L.; HERRING, T. A. (1995). «Measurement of the solar gravitational deflection of radio waves using very-long-baseline interferometry». *Physical Review Letters* [en línia], vol. 75, p. 1439-1442. <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1439>>.
- STERN, D.; DJORGOVSKI, S. G.; KRONE-MARTINS, A.; SLUSE, D.; DELCHAMBRE, L.; DUCOURANT, C.; TEIXEIRA, R.; SURDEJ, J.; BOEHM, C.; BROK, J. den; DOBIE, D.; DRAKE, A.; GALLUCCIO, L.; GRAHAM, M. J.; JALAN, P.; KLÜTER, J.; LE CAMPION, J.-F.; MAHABAL, A.; MIGNARD, F.; MURPHY, T.; NIERENBERG, A.; SCARANO Jr., S.; SIMON, J.; SLEZAK, E.; SPINDOLA-DUARTE, C.; WAMBSGANSS, J. (2021). «Gaia GraL: Gaia DR2 gravitational lens systems. VI. Spectroscopic confirmation and modeling of quadruply imaged lensed quasars». *The Astrophysical Journal* [en línia], vol. 921, p. 42. <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ac0f04>>.
- TREUHART, R. N.; LOWE, S. T. (1991). «A measurement of planetary relativistic deflection». *Astronomical Journal* [en línia], vol. 102, p. 1879-1888. <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991AJ....102.1879T/abstract>>.
- WALSH, D.; CARSWELL, R. F.; WEYMANN, R. J. (1979). «0957 + 561 A, B: Twin quasistellar objects or gravitational lens?». *Nature* [en línia], vol. 279, p. 381-384. <<https://www.nature.com/articles/279381a0>>.
- WYRZYKOWSKI, Ł.; KRUSZYŃSKA, K.; RYBICKI, K. A.; HOLL, B.; LECŒUR-TAÏBI, I.; MOWLAVI, N.; NIENARTOWICZ, K.; JEVAR DAT DE FOMBELLE, G.; RIMOLDINI, L.; AUDARD, M.; GARCIALARIO, P.; GAVRAS, P.; EVANS, D. W.; HODGKIN, S. T.; EYER, L. (2023). «*Gaia* Data Release 3. Microlensing events from all over the sky». *Astronomy & Astrophysics* [en línia], vol. 674, art. núm. A23, p. 1-20. <https://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2023/06/aa43756-22/aa43756-22.html>.

Entre dos mitos: Einstein y el método científico

Luis NAVARRO VEGUILLAS
Professor emèrit
Universitat de Barcelona

1. INTRODUCCIÓN

La conmemoración del centenario de la visita de Albert Einstein (1879-1955) a Barcelona en 1923, a través de las dos jornadas dedicadas por el Institut d'Estudis Catalans (IEC) a *Einstein i l'actualitat de les seves contribucions*, es una ocasión propicia para poner de manifiesto el uso peculiar que este hizo del conocido como *método científico* (MC), así como del carácter un tanto ambiguo de tan renombrado procedimiento. Ello nos permitirá obtener algunas consideraciones sobre ambos mitos —el personaje y el método— que pueden resultar un tanto sorprendentes debido a episodios y matices usualmente ignorados acerca del papel jugado por ambos en el desarrollo de la física.

Comenzaremos con una breve consideración acerca de las características del MC, atendiendo a una descripción de sus rasgos esenciales, tal y como suelen ser usualmente expuestos. Como punto de partida podemos tomar como un enunciado, por ejemplo, el que aparece en el *Oxford English Dictionary*: «procedimiento que ha caracterizado a las ciencias naturales desde el siglo XVII, consistente en la observación, medición y experimentación sistemáticas, y en la formulación, comprobación y modificación de hipótesis».¹ Pero antes de presentar nuestras consideraciones al respecto, recordemos, aunque sea someramente, algunos detalles sobre el origen y el desarrollo de tal método.

Aun siendo conscientes de la dificultad —y también de la injusticia— de asignar con rigor la paternidad de cualquier gran aportación a la cultura a un personaje concreto, dado el carácter de esta contribución nosotros daremos aquí

1. Cuando no se cita el nombre del traductor, como es el caso, ello indica que la traducción es propia.

por buena la idea de atribuir al inglés Francis Bacon (1561-1626) el establecimiento de las características esenciales del posteriormente conocido como MC, en gran medida contenidas en su famosísimo tratado *Novum Organum*, aparecido en 1620 (Bacon, 2011). Allí se preconiza la investigación acerca del comportamiento de la naturaleza como una fuente de conocimiento que podría conducir a una mejora permanente de la calidad de la vida humana. Para ello es necesario poner en claro las condiciones y formas de actuación para llegar a obtener conocimiento verdadero, lo que exige unos requisitos a los que de ninguna forma se ajusta la descripción aristotélica de la naturaleza ni los ulteriores refinamientos; esencialmente, por el escaso o nulo papel jugado por las experiencias para obtener las conclusiones.

Según Bacon, las experiencias —directas o provocadas— eran la mejor fuente para obtener conocimiento verdadero acerca del comportamiento del mundo físico, a pesar de la reconocida dificultad existente para interpretar los resultados obtenidos y luego llegar a conclusiones precisas desde su análisis. Precisamente por ello, todo intento de establecer conclusiones últimas correctas debía someterse a repetidas comprobaciones de las bases experimentales de partida —que debían ser reproducibles— y a la crítica rigurosa de otros científicos familiarizados con el problema analizado. La colaboración e intercambio de ideas entre científicos debería ser habitual para un mejor avance de la comprensión de la naturaleza. Incluso apuntó la idea de crear sociedades que facilitarían discusiones e intercambios.

Este tipo de nociones calaron pronto con fuerza en la mente y en la práctica de muchos científicos.² De hecho, este MC, aunque sin ser reconocido como tal, guarda gran similitud con el que venían practicando Nicolás Copérnico (1473-1543) y Tycho Brahe (1546-1601), por ejemplo. Y también lo emplearon, aunque ya en plena Revolución Científica, Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650) e Isaac Newton (1643-1727), entre otros, quienes, además, divulgaron su necesidad y refinaron su interpretación mediante la propia puesta en práctica. De hecho, existen historiadores y filósofos de la ciencia que asignan a algunos de estos últimos la paternidad del establecimiento del propio MC. Pero no es de nuestro interés dilucidar aquí este tipo de cuestiones. Nos conformamos con dejar constancia de que, desde entonces, se asigna al MC la exclusividad para llegar a formular teorías físicas dignas de consideración.

2. Emplear aquí el término *científico* es un claro anacronismo, que nos permitimos por comodidad. El término *científico* no fue introducido hasta 1833, cuando el filósofo británico William Whewell (1794-1866) lo sugirió para diferenciar a los practicantes del nuevo MC de los especulativos filósofos naturales y de los artesanos con habilidades para construir artilugios mecánicos.

Aunque no haya total acuerdo en cuanto a las etapas y especificaciones asociadas con el MC, este se suele presentar, a grandes rasgos, como integrado por estas fases:

- Reconocimiento y planteo de los objetivos.
- Consideración de los datos, observaciones y experimentos sobre el tema.
- Establecimiento de hipótesis para aventurar una explicación.
- Diseño y realización de pruebas lo más directas posibles para contrastar la validez de las hipótesis introducidas.
- Análisis de los resultados de las comprobaciones.
- Obtención de conclusiones, ya sean deduciendo lo inapropiado de las hipótesis introducidas o el establecimiento de su validez.
- Formulación clara de las conclusiones. Todo lo cual se hará público, generalmente.

Lo que pretendemos en esta corta exposición es poner de manifiesto cómo algunas desviaciones notables en el empleo del MC han conducido a la formulación de importantes teorías físicas y, en particular, cómo Einstein hizo un uso peculiar de dicho procedimiento, al recurrir en sus investigaciones a elementos ajenos al método en sí, incorporando unos elementos originales que se repetirían en el curso de su búsqueda de explicaciones del comportamiento del mundo físico. Así, trataremos de justificar la imposibilidad de atribuir las creaciones científicas exclusivamente a la práctica de un método bien definido y prefijado, por claras que parezcan sus características. En cualquier caso, quedará patente que las referencias al MC conllevan siempre un elevado grado de mitología.

La clave para nuestro propósito está en destacar —mediante algunos ejemplos del vasto muestrario que la historia de la física ofrece— el amplísimo espacio que separa las observaciones y los experimentos de la introducción de las correspondientes hipótesis, que son las que darán lugar a la formalización de una nueva teoría. Y, entre estos ejemplos, hemos elegido tres que ilustran la extraordinaria aportación que ciertas nociones han aportado al MC propiamente dicho, para obtener un resultado final trascendente:

- La intuición (Faraday, Maxwell).
- Los preconceptos (Einstein).
- La propia concepción de la ciencia (Einstein y Reichenbach).

2. MAXWELL Y LA INTUICIÓN

El objetivo de las primeras investigaciones del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) era la búsqueda de una estructura matemática que diera rigor y consistencia a las ideas expuestas por el químico y físico autodidacta inglés Michael Faraday (1791-1867), esencialmente en la década de 1830. El danés Hans Christian

Oersted (1777-1851) había demostrado experimentalmente, en 1820, que la electricidad era capaz de ejercer acciones mecánicas sobre una brújula. En 1831, a partir de originales e ingeniosos experimentos, Faraday evidenció que el magnetismo, a su vez, era susceptible de inducir fenómenos eléctricos, con lo que dejó definitivamente establecido que entre electricidad y magnetismo existía un firme nexo (Faraday, 1965). El esclarecimiento de esta relación constituyó el objetivo de una disciplina para la que se acuñó un nuevo término: *electromagnetismo*.³

Se trataba de dar sentido matemático a las nociones *líneas de fuerza* y *campo electromagnético* intuitas por Faraday —contra la *acción a distancia* newtoniana— para explicar los fenómenos electromagnéticos. En esta dirección, Maxwell publicó tres artículos fundamentales, antes de llegar al resultado final. He aquí una ligera referencia a los mismos:

— 1856: en «On Faraday's lines of force», Maxwell detectaba una analogía entre la propagación de un fluido incompresible (ficticio) y la del campo electromagnético, introduciendo en virtud de esa misma analogía unas magnitudes físicas que consideraba apropiadas para describir y tratar el campo electromagnético y su propagación. De esta forma obtiene unas ecuaciones que son la primera forma de las luego conocidas como *ecuaciones de Maxwell* (EM), aunque sin que en ellas apareciera aún la *corriente de desplazamiento* (Maxwell, 1856).

— 1861: en «On physical lines of force», Maxwell recurrió a un modelo completamente mecánico a base de vórtices de éter (responsables del magnetismo) entre los que se transmiten movimientos circulares, con la intervención de partículas materiales (responsables de la electricidad), que hacen de *cojinetes*. Como alguna vez se comentó en tono irónico y crítico ante lo que se podía considerar una burda justificación del resultado final, aquello recordaba más bien la construcción de un ingenioso mecanismo en el seno de una fábrica que la deducción de una ley fundamental de la naturaleza. Dado el profundo cambio en los supuestos de partida, no deja de sorprender que obtuviera otra vez como resultado las EM, ahora ya con la corriente de desplazamiento incluida (Maxwell, 1861).

— 1865: a pesar del éxito de las EM en la explicación de los resultados experimentales del momento, no es de extrañar el escepticismo generalizado ante los razonamientos ofrecidos por el escocés, con sus artificiales y cambiantes justificaciones. Enfrentado a las dificultades objetadas a sus dos deducciones anteriores, optó por una tercera vía. Así, en «A dynamical theory of the electromagnetic field», refinó las EM antes obtenidas y pasó a argumentar de una forma sorprendente: la justificación última de las ecuaciones obtenidas no radica en los razonamientos sino en el éxito de sus previsiones (Maxwell, 1865).

3. Curiosidad histórica: Maxwell nació el año que Faraday descubrió la inducción electromagnética y murió el año que nació Einstein.

Podemos considerar que esta historia acabó en 1873, con la publicación del luego universalmente famoso *Treatise*, en el que Maxwell ya toma sin ambages sus propias ecuaciones como punto de partida para obtener con rigor resultados conocidos y predecir otros nuevos que pronto fueron confirmados (Maxwell, 1954).

La reacción generalizada ante los intentos de Maxwell por justificar las EM, junto con el éxito de estas a la hora de explicar y predecir fenómenos electromagnéticos, condujo a la idea de que la aportación maxwelliana parecía una teoría fundamental, dada su estructura y rigor matemático, así como la amplitud de sus aplicaciones; todo ello a pesar de la aparente imposibilidad de llegar a una justificación cabal de las ecuaciones fundamentales. Así, se optó por su postulación y volcarse en sacar partido de las aplicaciones, tal como acabó haciendo el propio Maxwell. Para concluir este apartado nos remitimos a dos opiniones al respecto, ambas sumamente autorizadas. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) —el descubridor de las ondas electromagnéticas, en 1888— escribió en relación con el tema que nos ocupa:⁴

Más de uno se ha dedicado con ahínco al estudio de la obra maxwelliana, y, sin que le fueran obstáculo las extraordinarias dificultades matemáticas, ha tenido sin embargo que renunciar a formarse una concepción de las opiniones maxwellianas totalmente coherente. A mí mismo no me fue mejor. Por más que admirara las relaciones matemáticas de la teoría maxwelliana, no siempre estaba del todo seguro de haber vislumbrado la mentalidad auténtica de Maxwell, en cuanto al significado físico de sus afirmaciones [...]. A la pregunta «¿qué es la teoría maxwelliana?» no sabría dar una respuesta más breve y precisa que esta: la teoría maxwelliana es el sistema de las ecuaciones de Maxwell.

En términos parecidos se expresaba en 1902 el físico, epistemólogo e historiador francés Pierre Maurice Duhem (1861-1916), en su estudio crítico sobre el electromagnetismo de Maxwell:⁵

A menos que estemos cegados por una admiración por parcialidad, no podemos desconocer las incoherencias e inconsistencias que hacen que el razonamiento de Maxwell sea inaceptable para una mente justa; estas incoherencias no son, en el trabajo del físico inglés, defectos de menor importancia y fáciles de corregir; ilustres geómetras han tratado de poner orden en este trabajo y han tenido que renunciar a ello. ¿Qué curso de acción podemos tomar, dado que no podemos resolver ni para dar un valor demostrativo al razonamiento de Maxwell ni para abandonar la teoría electromagnética de la luz? [...]. Dado que los razonamientos y cálculos por los cuales Maxwell desarrolló su teoría de la

4. HERTZ (1892), p. 53 de la traducción española de García Doncel y Roqué (1990).

5. DUHEM (1902), p. 209 de la traducción española de Katz (2018).

electricidad y el magnetismo están en todo momento comprometidos por contradicciones no accidentales, no fáciles de corregir, sino esenciales e inseparables de todo el trabajo, dejemos de lado estos argumentos y cálculos. Tomemos simplemente las ecuaciones a las que han llevado a Maxwell, y sin tener en cuenta los procesos mediante los cuales se obtuvieron estas ecuaciones, aceptémoslas como hipótesis fundamentales, como postulados sobre los que basaremos todo el edificio de las teorías eléctricas. Así guardaremos, si no todos los pensamientos que han agitado la mente de Maxwell, al menos todo lo que es esencial e indestructible en estos pensamientos, porque «lo que es esencial en las teorías de Maxwell son las ecuaciones de Maxwell».

Ante la actitud de Maxwell en su búsqueda de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, cabe plantearse diferentes cuestiones. La esencial, en nuestra opinión: ¿cómo es posible que ante enfoques y puntos de partida tan dispares siempre obtuviera como resultado final las EM? Uno tiende a pensar que deberían estar en su mente desde un principio, lo que le permitió después justificarlas de diferentes formas: a través de una analogía primero, valiéndose de un modelo mecánico después y, finalmente, mediante una auténtica axiomatización. ¿Cómo encajar este variopinto modo de proceder dentro del encorsetado marco en el que se suelen encuadrar las prescripciones del MC? Es tan solo un episodio de la historia de la ciencia, que sirve para ilustrar el relevante papel que puede jugar la pura intuición en la creación científica, así como para poner de manifiesto las dificultades que implica establecer una clara demarcación de los límites del susodicho método.

3. EINSTEIN Y SUS APRIORISMOS

Los experimentos realizados a finales de la década de 1900 por el físico francés Jean Baptiste Perrin (1870-1942) confirmaron plenamente las previsiones einsteinianas de 1905 en su trabajo sobre el movimiento de partículas suspendidas en líquidos, en el que presentaba una explicación teórica del *movimiento browniano* (Einstein, 1905). Perrin llevó a cabo sus experimentos —principalmente, en 1908 y 1909— fuertemente atraído por la posibilidad de colaborar decisivamente en demostrar la validez de la hipótesis atómico-molecular, de la cual era decidido partidario, posiblemente influido por sus investigaciones previas sobre los rayos catódicos, cuyos resultados parecían confirmar la existencia de *átomos de electricidad*.

La teoría de Einstein y los experimentos de Perrin supusieron un espaldarazo definitivo para la admisión generalizada de la constitución atómico-molecular de la materia. Como ejemplo de la drástica conversión al atomismo hacia 1909, citamos dos elocuentes textos —separados por tan solo tres años— del energeticista

Wilhelm Ostwald (1853-1932), uno de los más ilustres activistas contra la doctrina molecular.⁶

Como he venido manteniendo durante los últimos diez años [...] debe ser sustituida [la teoría molecular] por otra teoría, a la que se ha dado en llamar *Energética* [...]. La cuestión sobre la identidad o no identidad de diferentes porciones de agua carece de sentido, puesto que no hay medio de aislar las partes individuales del agua e identificarlas [...]. Los átomos son tan sólo objetos hipotéticos.

[Harvard, 1906]

Me he convencido de que recientemente hemos llegado a la posesión de la prueba experimental de la naturaleza discreta o granular de la materia, que la hipótesis atómica ha venido buscando en vano durante siglos, incluso milenios [...] y, por otra parte, el acuerdo de los movimientos brownianos con las predicciones de la hipótesis cinética, que ha sido demostrado por una serie de investigadores, principalmente por Perrin, es una evidencia que ahora justifica que incluso los científicos más cautelosos hablen de la prueba *experimental* de la naturaleza atómica de la materia que rellena el espacio. Lo que hasta ahora se ha venido llamando hipótesis atómica queda por tanto elevada al nivel de teoría bien fundamentada.

[Leipzig, 1909]

En su autobiografía científica —escrita cuarenta años después de los acontecimientos que estamos comentando— Einstein incluye una reflexión sobre esta conversión generalizada al atomismo, que resulta muy apropiada para mostrar sus ideas sobre el papel de los preconceptos en el proceso de la creación científica:⁷

La concordancia entre estas consideraciones [la explicación teórica del movimiento browniano] y la experiencia, junto con la determinación de Planck del tamaño molecular verdadero a partir de la ley de radiación (para altas temperaturas), persuadió a los por aquel entonces numerosos escépticos (Ostwald, Mach) de la realidad de los átomos. La aversión de estos investigadores hacia la teoría atómica hay que atribuirle sin duda a su actitud filosófica positivista. Es éste un interesante ejemplo de que incluso investigadores de espíritu audaz y fino instinto pueden verse estorbados por prejuicios filosóficos a la hora de interpretar los hechos. El prejuicio —que aún no se ha extinguido— consiste en creer que los hechos por sí solos, sin libre construcción conceptual, pueden y deben proporcionar conocimiento científico. Semejante ilusión es sólo posible porque no es fácil percatarse de la libre elección de tales conceptos, los cuales, por su validez y uso prolongado, aparecen como directamente conectados con el material empírico.

6. BRUSH (1976), vol. 2, pp. 698-699. El énfasis aparece en el original.

7. EINSTEIN (1949), p. 62 de la traducción española de Sánchez Ron (2005).

Lo que nos interesa resaltar aquí no es solo el señalamiento por parte de Einstein del inevitable papel que juegan preconcepciones y prejuicios en los procesos de creación científica —lo que ciertamente implica una cierta deformación del glorificado MC—, sino algo que puede resultar aún más llamativo: el cambiante papel que ciertos apriorismos jugaron en la mente del propio Einstein, según el tema y la época.

Por ejemplo, en el tratamiento del concepto *tiempo* en su teoría especial de la relatividad, en 1905, Einstein huye de toda idea preconcebida, como destaca desde el principio, insistiendo en que toda consideración científica sobre tal noción ha de pasar por un análisis riguroso de la forma práctica de medir tiempos, lo que lo lleva a estudiar y destacar el mecanismo empleado para sincronizar los relojes empleados a tal fin. En este sentido, Einstein se aleja notablemente de los supuestos apriorísticos de Immanuel Kant (1724-1804), entre los que el tiempo era uno de los más distinguidos. Precisamente, la conferencia que Einstein impartió en la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, en su visita a esta ciudad en 1923, estuvo en buena parte dedicada a pasar revista a las nociones apriorísticas de Kant sobre el espacio y el tiempo, para a continuación exponer su rechazo de estas, a la vista del desarrollo de sus teorías relativistas.

En relación con lo anterior, cabe señalar la existencia de preconcepciones basadas en la filosofía del creador que, sin estar expresamente incluidas entre las características atribuidas al MC en sí, han tenido una función relevante en la génesis de algunas teorías científicas. A título de ejemplo, podríamos citar el reconocido papel que la filosofía natural alemana desempeñó en la génesis y en la aparición de las primeras ideas sobre el campo electromagnético. Oersted y Faraday, por ejemplo, bebieron de las fuentes de aquella filosofía, que sugería la reducción de todas las acciones a tan solo dos tipos de fuerzas —atracción y repulsión—, así como la posible interconvertibilidad de todas las fuerzas de la naturaleza. Consta que la aparición en 1799 de *Naturphilosophie* —escrita por el filósofo F. W. Joseph Schelling (1775-1854) en la línea del idealismo alemán auspiciado por Kant— influyó decisivamente en el desarrollo de algunas de las más trascendentes nociones físicas que vieron la luz en el siglo XIX (Caneva, 1997).

Es curioso observar la evolución del pensamiento de Einstein en torno al papel que atribuye a los apriorismos en la formulación de las teorías científicas. Se detecta con claridad al observar su actitud ante la aparición de la mecánica cuántica, unos veinte años después de la relatividad. En la nueva disciplina conceptos tan arraigados en la física clásica como la *causalidad* y el *determinismo* quedaban derrocados, siendo sustituidos por una descripción última de naturaleza estadística. Las predicciones cuánticas, como es bien sabido, de los resultados experimentales obtenidos al medir magnitudes físicas propias del mundo atómico, no pasan de ser de carácter probabilístico. Y es aquí donde Einstein comienza a mostrar con

rotundidad la fortaleza de sus apriorismos en relación con el papel de la probabilidad en la física. En su opinión, una teoría que no va más lejos de lograr predicciones de carácter estadístico no es una teoría *completa*, según su propia terminología.

A primera vista, sorprende que fuera precisamente el papel de la probabilidad lo que hizo que Einstein considerara la mecánica cuántica como una teoría provisional, en el mejor de los casos. Sobre todo, si se tiene en cuenta su trayectoria al respecto. Fue él quien refinó durante el primer lustro del siglo xx la mecánica estadística de Ludwig Boltzmann (1844-1906), proporcionando una explicación mecánico-estadística del movimiento browniano en 1905. Posteriormente, hacia 1910, responsabilizó las fluctuaciones estadísticas de la *opalescencia crítica*. Y en 1917 introdujo las *probabilidades de transición* para justificar la existencia del fotón como auténtica partícula elemental, tras deducir la necesidad de asignar también un impulso a los hasta entonces meros cuantos de energía. Finalmente, formuló, junto al físico bengalí Satyendranath Bose (1894-1974), la primera mecánica estadística cuántica en 1924, un año antes de que Werner Heisenberg (1901-1976) presentara su versión matricial de la mecánica cuántica y dos años antes de que Erwin Schrödinger (1887-1961) hiciera lo propio con la formulación ondulatoria. A la vista de lo anterior, parece obligado detenerse para analizar la auténtica posición de Einstein ante el posible cometido de las nociones estadísticas en las teorías físicas.

4. EINSTEIN Y LA PROBABILIDAD

Antes de examinar la cuestión, consideramos imprescindible aclarar, como hemos hecho en otras ocasiones, que caben tres formas diferentes de entender el concepto *probabilidad* en física. A tal fin, hemos acuñado los siguientes términos (Navarro, 2020, pp. 46-48):

— *Probabilidad metodológica*. Surge en el último tercio del siglo xix, sobre todo en los respectivos intentos de Maxwell y Boltzmann por dar con una explicación de la termodinámica en términos microscópicos, a partir de la mecánica newtoniana. Se trataba de partir de supuestos procesos moleculares que obedecían las leyes deterministas de la mecánica clásica, si bien estas no se utilizaban en el análisis; no solo por no conocerse con exactitud las fuerzas y las condiciones iniciales del universo molecular, sino porque ambas resultaban irrelevantes para alcanzar los objetivos propuestos. Esta concepción de la probabilidad es la que preside los desarrollos de las teorías cinéticas del siglo xix y culmina con la formulación de la mecánica estadística moderna, a principios del siglo xx.

— *Probabilidad fenomenológica*. En ciertos episodios históricos se recurrió a descripciones probabilistas porque no se encontró otro procedimiento a la sazón.

Es lo que ocurrió, por ejemplo, en los primeros intentos de explicación cuantitativa de las desintegraciones radiactivas. En espera de una mejor comprensión de la naturaleza del fenómeno, una descripción estadística de la aparentemente espontánea desintegración de ciertos núcleos resultaba útil para obtener algunas previsiones teóricas que encajaban razonablemente bien con los resultados experimentales. Los tratamientos probabilistas de esta naturaleza aparecieron en la historia de la física con pretensiones puramente descriptivas —no explicativas—, lo que conllevaba que las teorías formuladas con este tipo de probabilidad incorporasen siempre un acusado carácter de provisionalidad.

— *Probabilidad esencial*. La mecánica cuántica, formalizada en 1925 y 1926, incorporaba una nueva concepción de la probabilidad, al incluir un notable principio: la descripción estadística es la única posible para acceder al conocimiento del mundo atómico. A este nivel, las predicciones teóricas últimas no pasan de ser de naturaleza probabilista. Incidentalmente, señalaremos aquí que hoy se considera demostrado que esta descripción estadística propia de la mecánica cuántica no resulta compatible con ninguna teoría determinista que proporcione, como mínimo, los mismos resultados que dicha teoría.

Es una lástima, en nuestra opinión, que estas distintas concepciones sobre la función que pueda tener la probabilidad en las teorías físicas no suelen aparecer claramente diferenciadas en los trabajos de corte historiográfico, ni tampoco en los mismos manuales de física. Resumiendo: *probabilidad* es el nombre impreciso de un concepto cuyo destacado papel en la historia de la física solo se puede entender si se es consciente del apellido que conlleva. Era un claro prejuicio einsteiniano que únicamente las probabilidades de naturaleza metodológica o fenomenológica tenían cabida en el seno de la física.

Por ello, Einstein mostró pronto su desacuerdo con la probabilidad esencial implicada en la interpretación probabilista de la función de onda introducida por Max Born (1882-1970) en 1926; un dogma que pronto quedó incorporado a la versión ortodoxa del nuevo formalismo, recogido universalmente en la famosa *interpretación de Copenhague*.⁸ La fuerza de este apriorismo einsteiniano sobre el papel de la probabilidad en las teorías físicas ya se había manifestado con rotundidad antes de la formulación de la mecánica cuántica. Por ejemplo, en una carta que dirigió en 1924 a la esposa de Born, Einstein expresaba sus sentimientos mediante una curiosa metáfora:⁹

8. La *interpretación de Copenhague* responde a una terminología introducida por Heisenberg en 1955, aunque el marco interpretativo nunca estuvo inequívocamente determinado. Por ejemplo, el propio Niels Bohr nunca se adhirió plenamente a la idea del *colapso de la función de onda*, una noción que suele ocupar un lugar preminente en el escenario asociado con aquella interpretación.

9. Carta de Einstein a Hedwig Born (29 de abril de 1924) en BORN (ed.) (1971), p. 82. El énfasis aparece en el original.

No desearía verme forzado a renunciar a la causalidad estricta sin defenderla con mayor intensidad que lo he hecho hasta ahora. Me resulta completamente intolerable la idea de que un electrón expuesto a radiación pueda escoger *según su propio libre albedrío*, no solo el momento para saltar, sino también la dirección. Si este fuera el caso, preferiría haber sido zapatero remendón, o incluso empleado de un casino, antes que físico.

Resulta cuando menos curioso detectar que Einstein enfocó el análisis de la mecánica cuántica con sus propios preconceptos sobre determinismo, cayendo en la misma tacha que él cargó unos veinte años antes, por ejemplo, sobre los defensores del tiempo absoluto, como su fiel colega y amigo Paul Ehrenfest (1880-1933) le recriminó en más de una ocasión. Es bien conocido que, esencialmente, ante la ausencia de determinismo, Einstein nunca llegó a considerar que la mecánica cuántica fuese una teoría *completa*, sino una teoría provisional, aunque con innegable éxito en la predicción de resultados de fenómenos atómicos. Lo previsible, según Einstein, es que llegue un día en el que la mecánica cuántica pueda obtenerse desde una teoría más general, como sucede con la electrostática, que es deducible a partir de la teoría del campo electromagnético de Maxwell, o de la termodinámica, que se puede justificar desde la mecánica clásica, con algunos supuestos adicionales.

La descripción que proporciona la mecánica cuántica a través de la función de onda no describe en realidad un sistema físico concreto, sino que rige el comportamiento estadístico de un gran número de sistemas igualmente preparados por lo que a los valores de las magnitudes físicas controlables se refiere. Por ello, los preconceptos deterministas de Einstein le impiden aceptarla como una teoría completa, al no describir con certeza el comportamiento de cada sistema individual. Es lo mismo que sucede con la termodinámica, que, a través de la mecánica estadística, representa el comportamiento medio de las moléculas de un gas, por ejemplo, pero nada afirma sobre el comportamiento físico individual de las moléculas. El comportamiento de cada una de estas se rige por las leyes de la mecánica clásica, que involucran magnitudes características de la molécula; no del gas.

Sigamos con esta analogía, que, aunque no del todo rigurosa, ayuda a esbozar la esencia de las teorías de *variables ocultas* en las que pensaba Einstein. Si se hubiera conocido la ley de distribución para las velocidades moleculares de un gas ideal antes que las leyes de la dinámica, estaríamos ante una situación similar a la que nos ocupa; siempre según la opinión de Einstein. La distribución de Maxwell proporciona una información estadística, de forma análoga a la que proporciona la mecánica cuántica. Pero si las moléculas del gas, además de por su velocidad, se caracterizan por sus posiciones —que serían las variables ocultas en esta analogía—, cuando se llegara a descubrir la mecánica newtoniana, se podría entender esta

como una teoría de variables ocultas, capaz de determinar con total precisión la evolución temporal de las moléculas a partir de sus condiciones iniciales. Después, añadiendo los supuestos típicos de la mecánica estadística, y promediando sobre aquellas posiciones, se habría de obtener la distribución de Maxwell, como efectivamente sucede.

El hecho de que este preconcepto nunca abandonó su lugar privilegiado en la mente de Einstein lo confirma al final de *Reply to criticisms* («Respuesta a las críticas») en el libro con el que se lo homenajeó en 1949, con motivo de su septuagésimo aniversario. En esta circunstancia cabe considerar sus palabras como expresión de su pensamiento último en relación con su preconcepto determinista.¹⁰

En pocas palabras, la conclusión es la siguiente: en el marco de la teoría cuántica estadística no ha lugar a algo así como una descripción completa del sistema individual. Más prudentemente se podría afirmar lo que sigue: el concebir la descripción mecánico-cuántica como la descripción completa de los sistemas individuales conduce a interpretaciones teóricas artificiales, que se convierten inmediatamente en innecesarias si se acepta la interpretación según la cual la descripción se refiere a conjuntos de sistemas y no a sistemas individuales. En este caso, todas las precauciones adoptadas para librarse de lo «físicamente real» se hacen superfluas. Existe, sin embargo, una razón psicológica simple para el hecho de que esta interpretación mucho más obvia venga siendo rehuida. Pues si la teoría cuántica estadística no aspira a describir completamente los sistemas individuales (y su evolución en el tiempo), *parece inevitable tratar de dar con una descripción completa del sistema individual*; en esta misión debería quedar claro desde un principio que los elementos de tal descripción no pertenecen al marco conceptual de la teoría cuántica estadística [...]. Estoy bastante convencido de que el desarrollo de la física teórica irá por esta vía; pero el camino será muy largo y difícil.

5. EINSTEIN, UN OPORTUNISTA EPISTEMOLÓGICO

En relación con el peculiar empleo que Einstein hizo del MC, nos parece adecuado incluir una referencia a algunos aspectos de las discusiones que tuvo con el filósofo de la ciencia y físico alemán Hans Reichenbach (1891-1953), especialmente a propósito del papel que jugó —o pudo jugar— el luego renombrado *experimento de Michelson y Morley* (EMM), que Albert A. Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923) realizaron en 1877 y cuyo resultado sugería la nula reacción que el supuesto por entonces éter electromagnético oponía al movimiento de la Tierra en cualquier dirección. O lo que es lo mismo: no detectaron el de-

10. SCHILPP (ed.) (1970), p. 671-672. El énfasis es añadido.

nominado *viento de éter*, lo que se tomó como un resultado negativo ante lo esperado.

¿Qué papel desempeñó dicho experimento en la formulación de la teoría de la relatividad especial en 1905? A primera vista, ninguno. Einstein no lo cita en sus trabajos fundacionales y cuando se le preguntó sobre el tema, aunque al principio negó conocer el EMM en aquella época, hubo de acabar admitiendo que algo había oído sobre el tema —el resultado negativo de dicho experimento—, pero nunca admitió que tuviera la menor influencia en su formulación de 1905. El tema resulta más complicado y ha merecido atención especial por parte de historiadores y filósofos de la ciencia, dado su indudable interés en relación con la teoría y la práctica del MC.¹¹

Destaquemos aquí la reiteración con la que se suele hacer referencia al EMM como acicate y punto de partida para que Einstein, en su búsqueda de una explicación teórica del resultado negativo del experimento, llegara a su formulación de la teoría de la relatividad especial, a pesar del rechazo del mito a admitir tal motivación. Esta asociación tradicional entre EMM y teoría de la relatividad viene de largo. Por ejemplo, Robert A. Millikan (1868-1953), en un artículo de divulgación escrito en 1949, se expresaba en estos términos acerca de los orígenes de la relatividad:¹²

Puede considerarse que la teoría de la relatividad parte esencialmente de una generalización establecida a partir de los experimentos de Michelson. Y aquí es donde aparece el atrevido enfoque propio de Einstein, porque la característica distintiva del pensamiento científico moderno radica en el hecho de que empieza por desechar todas las concepciones *a priori* sobre la naturaleza de la realidad [...]; en su lugar toma como punto de partida hechos experimentales probados cuidadosamente y de autenticidad bien establecida, sin importar el que estos hechos parezcan en esos momentos razonables o no. En una palabra, la ciencia moderna es empírica, pero este experimento, después de haber sido ejecutado tan refinadamente y con habilidad tan extraordinaria por Michelson y Morley, dio como claro resultado que no hay una velocidad observable de la Tierra con respecto al éter. Este hecho experimental, aparentemente inexplicable y poco razonable, era muy molesto para la física del siglo XIX, y así, durante casi cuarenta años después de salir a la luz este hecho, los físicos vagaron sin rumbo esforzándose sin éxito para hacer que pareciese razonable. Entonces Einstein nos instó a todos: «Aceptemos esto simplemente como un hecho experimental y sigamos a partir de ahí deduciendo sus consecuencias inevitables», embarcándose él mismo en aquella tarea con una capacidad y energía que muy poca gente de este mundo poseen. Así nació la teoría especial de la relatividad.

11. Véase, por ejemplo, el artículo de Gerald Holton «Einstein, Michelson y el experimento crucial», publicado en 1969 y reproducido en HOLTON (1982), pp. 204-293.

12. HOLTON (1982), p. 205.

No son pocos los físicos y filósofos que, aun hoy, compartirían plenamente estas opiniones, teniendo en cuenta el imprescindible papel de la experimentación en la génesis de las teorías físicas, si uno se atiene estrictamente a las prescripciones usuales del MC. Y ello, a pesar de la clara oposición del propio Einstein a admitirlo en su caso.

Reichenbach fue, entre los filósofos de la ciencia, uno de los más insistentes en considerar que los experimentos —o los datos experimentales— constituían la base imprescindible para llegar hasta la formulación de toda teoría física en virtud de un proceso de inducción. Pero la historia de la física está plena de episodios en los que las cosas no discurrieron de acuerdo con ese patrón *experimenticista*, pues el experimento en sí no es suficiente para que la inducción conduzca unívocamente a la teoría física. A veces, aplicando el proceso de inducción a los mismos experimentos, se llegó a hipótesis radicalmente diferentes. Consideremos, a título de ejemplo, un caso notable ocurrido en la primera mitad del siglo XIX.

Ya hemos visto que, tras la impresión producida por el experimento del danés Oersted en 1820, Faraday diseñó y realizó una gran cantidad de ingeniosos y finos experimentos que ponían de manifiesto un gran número de insospechadas acciones entre corrientes eléctricas e imanes. Faraday responsabilizó de ellas a la existencia de campos electromagnéticos que se propagan por el espacio —vacío incluido— con velocidad finita, lo que condujo a la formulación del electromagnetismo por Maxwell. Pero el físico francés André-Marie Ampère (1775-1836) vio los mismos experimentos con ojos distintos, desde el mismo instante en el que comprobó en su propio laboratorio la realidad de los hechos observados por el danés.

Para un newtoniano de pro, como era el caso de Ampère, el fluido eléctrico solo podía interactuar con el fluido eléctrico y el fluido magnético con el fluido magnético. De acuerdo con tal premisa —¡otro puro preconcepto!—, el resultado del experimento de Oersted podía ser trivialmente interpretado si se admitía, por ejemplo, que el magnetismo es tan solo una forma de electricidad. Si así fuera, como intuía Ampère, dos hilos recorridos por sendas corrientes eléctricas deberían interactuar, igual que lo hacen dos imanes. Y lo comprobó experimentalmente: dos hilos conductores paralelos se atraían al ser recorridos por corrientes eléctricas en el mismo sentido y se repelían cuando las corrientes tenían sentidos opuestos.

La conclusión de Ampère fue doble. Por un lado, el magnetismo no era más que electricidad en movimiento, creando así las bases de otra nueva disciplina: la *electrodinámica*, que habría de estudiar las propiedades de las interacciones entre corrientes eléctricas. Por otra parte, y como corolario de lo anterior, el físico francés pensó que los efectos de los imanes podrían reproducirse con corrientes eléc-

tricas adecuadamente diseñadas. Él mismo lo confirmó experimentalmente, dando así el primer paso hacia la creación de *electroimanes*.¹³

En el caso anterior, ante los mismos experimentos, dos potentes procesos de inducción caminan por sendas distintas. Pero es que hay casos en los que ni siquiera hay experimento o son mínimos los resultados experimentales fiables al alcance de quien después formulara una potente teoría. Si Boltzmann formuló ciertas hipótesis moleculares para tratar de deducir la termodinámica a partir de la mecánica newtoniana, ¿cuáles eran los experimentos y los resultados experimentales a su disposición? Fácil de contestar: ¡ninguno! Como tampoco existían apenas datos experimentales mínimamente contrastados sobre el efecto fotoeléctrico o sobre el movimiento browniano, cuando Einstein en 1905 abordó la explicación teórica de esos fenómenos. Hay que ir con pies de plomo antes de sustentar con firmeza la afirmación de que todo proceso de inducción —como parte del MC— se basa en la experimentación.

Además, conviene también tener en cuenta que el experimento y sus resultados tampoco son completamente asépticos, pues suelen estar contaminados por prejuicios y supuestos, tanto en el diseño como en la obtención de datos, lo que en buena medida puede condicionar la interpretación de los resultados. Para ilustrar una tal tesis, Arthur Stanley Eddington (1882-1944) presentó el ingenioso —y convincente, en nuestra opinión— símil que resumimos a continuación.

Supongamos que un escultor nos asegura que en el interior de todo bloque de mármol yace oculto el relieve de una cabeza humana. Ante nuestra incredulidad, el escultor procede a convencernos: toma un bloque cualquiera y adoptando como herramienta experimental tan solo un cincel y un martillo, se dedica a su trabajo hasta que logra que aparezca ante nosotros la forma que había anticipado. ¿Confirma este *experimento* la aseveración inicial del escultor? ¿O, más bien, el diseño y la realización del experimento han condicionado de forma determinante su resultado? Eddington propuso este ejemplo en 1939 para justificar su posición escéptica ante la predicción que por aquella época hacían algunos físicos sobre la existencia de una nueva partícula, el *neutrino*, introducido para explicar ciertas sutilezas que surgían al analizar ciertas desintegraciones radiactivas. Justificaba así que, a pesar de no estar de acuerdo con la existencia de la nueva partícula —«no creo en los neutrinos», sostenía Eddington—, sería sumamente arriesgado vatici-

13. En esta línea de priorizar la electricidad sobre el magnetismo, Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) modificó ideas iniciales de su colega Ampère, llegando entre ambos a sugerir que el magnetismo en la materia podría estar originado por corrientes moleculares internas. El largo intento por detectar esas hipotéticas *corrientes de Ampère* atrajo muchos investigadores. Por ejemplo, el propio Einstein colaboró en un curioso experimento que, incidentalmente, puso de manifiesto la ligereza de algunos científicos al obtener e interpretar datos, con el ánimo de que encajen en una teoría preconcebida (véase, por ejemplo, Navarro (2020), pp. 249-253).

nar que los físicos experimentales no tendrían «suficiente ingenio como para *fabricar* neutrinos». ¹⁴

Volvamos a Einstein y al EMM. Reichenbach, como filósofo de la ciencia, no estaba tan interesado en reproducir fielmente el proceso de la creación científica, como en justificar desde el punto de vista lógico la coherencia y el rigor de las teorías físicas. Lo dejó bien claro al referirse a la formulación de la teoría especial de la relatividad: su objetivo como filósofo era la reconstrucción lógica de la teoría, partiendo del EMM como fundamento experimental. Y lo expresó con claridad en estos precisos términos, recogidos en dos párrafos de su colaboración en el libro de homenaje a Einstein antes mencionado: ¹⁵

Einstein tampoco es un filósofo en el sentido técnico. Parece prácticamente imposible que el hombre que busca nuevas leyes físicas deba concentrarse en el análisis de su método; realizará esta segunda tarea solo cuando dicho análisis sea indispensable para el hallazgo de resultados físicos. La división de trabajo entre el físico y el filósofo parece ser una consecuencia ineludible de la organización de la mente humana [...]. El filósofo de la ciencia no está muy interesado en los procesos mentales que conducen a los descubrimientos científicos; busca un análisis lógico de la teoría una vez completada, incluidas las relaciones que establecen su validez. Es decir, *no está interesado en el contexto del descubrimiento, sino en el de la justificación*. Pero la actitud crítica puede hacer que un hombre sea incapaz de obtener descubrimientos; y, mientras tenga éxito, el físico creativo puede muy bien preferir su credo a la lógica del filósofo analítico.

La exposición axiomática no solo es propia de los filósofos de la ciencia que persiguen la reconstrucción de las teorías físicas, sino que también se suele emplear en la enseñanza misma de la física. Pero un uso exagerado de la axiomática en la exposición de las bases de la física moderna priva al estudiante universitario de adentrarse en las distintas modalidades de uso del mitificado MC y de la diversidad de procesos mentales adicionales que los grandes creadores pusieron de su parte para lograr la formulación de sus teorías respectivas. Ello hace casi imperceptible a los ojos del científico en formación —y, tal vez, incluso en su práctica profesional posterior— el mito que supone responsabilizar a un método bien definido de la formulación de las teorías que describen el comportamiento del mundo físico.

14. EDDINGTON (1946), pp. 155-160. El énfasis aparece en el original. La existencia de tal partícula fue predicha por Wolfgang E. Pauli (1900-1958), en 1930. Enrico Fermi (1901-1954) acuñó para ella el término *neutrino* e incorporó esta partícula en su tratamiento de la desintegración beta, a finales de 1933. Durante la segunda mitad del siglo xx aparecieron evidencias experimentales sobre la existencia de diferentes tipos de neutrinos.

15. REICHENBACH (1949), p. 292. El énfasis es añadido.

Por ejemplo, la mecánica cuántica ofrece suficientes peculiaridades para que, al introducirse en su formalismo, las preguntas acerca de la justificación de conceptos y nociones que en ella se manejan repetidamente sean incesantes; especialmente, al considerar ideas que se apartan de nuestra intuición y de las nociones físicas habituales anteriores. ¿Cómo se puede justificar algo tan novedoso y llamativo en su tiempo como fue el establecimiento de la *ecuación de Schrödinger* para la función de onda de una partícula? ¿Y qué decir de su interpretación probabilista? ¿No resulta altamente sorprendente que los aparatos de medida *sepan* que solo pueden proporcionar como resultados de las medidas de una magnitud física los valores propios de un cierto operador matemático asociado a dicha magnitud?

La génesis y el desarrollo de estas nociones y otras similares se pueden seguir paso a paso a través de la evolución del pensamiento de los propios creadores, lo que resulta esclarecedor y estimulante. Pero lleva su tiempo. Para alguien cuyo interés radique exclusivamente en la aplicación de tales conceptos para el cálculo y la predicción de resultados experimentales, puede resultar una pérdida de tiempo tratar de entender el desarrollo histórico-conceptual de las ideas; tal vez baste con saber aplicarlas. En este sentido, admitir de partida unos postulados claros y hábilmente ordenados puede representar una inestimable ayuda para *contestar* a preguntas como las de los ejemplos anteriores, aunque siendo conscientes del precio que con ello se paga.

A propósito de esta posible confusión entre contextos, Einstein expuso con claridad —en *Reply to criticisms* («Respuesta a las críticas») incluida en el libro homenaje que se le dedicó en 1949— su posición ante los métodos y recursos que los científicos emplean realmente para llegar a la formulación de hipótesis. Allí concretó la gran diferencia que, en su opinión, existe entre los dispares contextos implicados en la concepción y en la formulación axiomática de las teorías, así como la imposibilidad práctica de que el científico creador se ajuste a una forma predefinida de proceder; o lo que es lo mismo, a la puesta en práctica de un método concreto al que ceñirse escrupulosamente para lograr desvelar las intimidades del comportamiento del mundo físico. Con la mente puesta en las ideas expresadas por Reichenbach y otros filósofos de la ciencia, Einstein se expresó así:¹⁶

La relación recíproca que existe entre la epistemología y la ciencia tiene características notables. Dependen una de otra. La epistemología sin contacto con la ciencia se convierte en un esquema vacío. La ciencia sin epistemología es —en caso de que sea posible concebirla— primitiva y confusa. Sin embargo, una vez que el epistemólogo que va en busca de un sistema que le ofrezca claridad se logra abrir paso y consigue llegar a tal sistema, ya tiende a interpretar

16. HOLTON (1982), p. 228-229. El énfasis aparece en el original.

el contenido de la ciencia de acuerdo con su sistema rechazando todo aquello que no encaja en él. Sin embargo, el científico no puede permitirse el llevar tan lejos sus ansias de sistematización epistemológica. Recibe con los brazos abiertos el análisis epistemológico de los conceptos; pero las condiciones externas que para él definen los hechos de la experiencia le impiden limitarse excesivamente al construir su mundo conceptual, por la adhesión a un sistema epistemológico. Por ello debe parecer un oportunista sin escrúpulos a los ojos del epistemólogo sistemático: se muestra como *realista* en cuanto intenta describir un mundo independiente del acto de percibir; como *idealista*, en cuanto considera los conceptos y teorías como invenciones libres del espíritu humano (que no son derivables lógicamente de los datos empíricos); como *positivista*, en cuanto considera justificados sus conceptos y teorías solamente en la medida en que proporcionen una representación lógica de las relaciones entre las experiencias sensoriales. Puede incluso parecer *platónico* o *pitagórico* en cuanto considera la simplicidad lógica como un enfoque que sirve como herramienta indispensable y efectiva en su investigación.

6. OTROS RECURSOS METODOLÓGICOS DE EINSTEIN

Hay quien asigna también un papel importante en la formulación de teorías físicas a la pertenencia del autor a una escuela o a un grupo de investigación; ello lo pone en contacto con una tradición y unas directrices que orientan —y, en buena parte, deciden— el curso de su trayectoria investigadora. Pero dista de ser una regla general a la luz de la historia de la física. Por ejemplo, ciñéndonos al caso de Einstein, cabría pensar que a comienzos de su famoso *annus mirabilis* de 1905 se encontraba en una posición de partida aparentemente desfavorable para soñar con aportaciones revolucionarias a la física del momento. Su escasa relación con el mundo académico podía representar un factor negativo a la hora de abordar problemas de envergadura. Pero bien pudo suceder exactamente lo contrario: la osadía de su juventud y la falta de ligaduras con autoridades científicas que tuvieran que dar alguna clase de beneplácito a su trabajo, tal vez fueron circunstancias favorables para que su inteligencia y su imaginación se desarrollaran con plenitud, como efectivamente sucedió. En este caso, tampoco hay que dejar de lado los beneficios —reconocidos por el propio Einstein— que para el despliegue de su creatividad aportó también su trabajo como analista de las solicitudes de patentes, que lo obligaba a mantener una relación permanente con el mundo de los inventos y de la experimentación.

Con el propósito de aclarar lo que entendemos por osadía einsteiniana, fijémonos en un ejemplo. A comienzos del siglo xx se admitía la existencia de dos tipos de realidades físicas, mutuamente incompatibles y con formalismo propio: la materia y la radiación. El mundo de las partículas materiales —el mundo del discreto— obedecía a las leyes mecánicas de Newton, mientras que el mundo de

la radiación electromagnética —el mundo del continuo— era regido por las ecuaciones de Maxwell. Era impensable por entonces operar con los dos formalismos dentro de una misma teoría. Pues bien, Einstein osó mezclar ambos reinos —veinte años antes de la aparición de la luego famosa *dualidad onda-corpúsculo*— y lo hizo con notable éxito en dos ocasiones claves en 1905, con tan solo veintiséis años.

En una primera ocasión, al poner de manifiesto la existencia de una analogía formal entre las respectivas teorías del gas ideal de moléculas (tratamiento discreto) y de la radiación del cuerpo negro (tratamiento continuo). Ello fue lo que lo condujo a la formulación de su primera hipótesis cuántica sobre el intercambio de energía en los fenómenos de emisión y absorción de radiación por la materia. En una segunda ocasión, también en su famoso *annus mirabilis*, logró dar con una explicación teórica para el movimiento browniano tras un análisis sumamente original del equilibrio entre dos fenómenos distintos: los choques moleculares (tratamiento discreto) entre las moléculas de un fluido y la resistencia que el medio —es decir, el propio fluido— ofrece según la teoría de las disoluciones (tratamiento continuo).

En un apartado como este, no podemos dejar de lado el fructífero recurso de Einstein a originales *Gedankenexperimente*, de los que obtuvo resultados de gran calado.¹⁷ Por ejemplo, en 1909, presentó por vez primera uno de estos experimentos mentales al que luego recurrió en varias ocasiones, aunque añadiendo siempre alguna ligera actualización para adaptarlo a la física del momento. En principio, se trataba de analizar las propiedades del movimiento de traslación uniforme de un espejo, totalmente reflectante para una pequeña gama de frecuencias y transparente para el resto, moviéndose en el interior de una cavidad con gas y radiación electromagnética; todo ello, en equilibrio estadístico a una cierta temperatura. El análisis peculiar que Einstein hizo de este experimento mental —en el que las fluctuaciones estadísticas juegan un papel relevante— no solo lo llevó a reafirmarse en su idea de la necesidad de introducir el cuanto de energía electromagnética que había propuesto en 1905, sino que le sugirió una compatibilidad inesperada entre el discreto y el continuo —es decir, entre el aspecto corpuscular y el ondulatorio—, en el caso de la radiación.

17. *Gedankenexperiment* ('experimento mental') es una terminología ampliamente utilizada para referirse a un experimento propuesto para someter a crítica una teoría o algún aspecto concreto de la misma. El experimento no se diseña para ser realizado, sino para ser sometido a un análisis lógico. Por ello, estos experimentos no necesitan ser factibles; en general, no lo son, sin que por ello pierdan valor las posibles consecuencias que un riguroso análisis lógico pueda poner de manifiesto. Este tipo de *experimentos*, aunque no muy abundantes, han desempeñado una función relevante en ciertos apartados de la física. Algunos ejemplos famosos: *barco de Galileo*, *demonio de Maxwell*, *gato de Schrödinger*, *amigo de Wigner*.

A este mismo experimento mental recurrió, en 1916, para establecer la realidad de los cuantos como partículas elementales constituyentes últimos de la radiación electromagnética, solo que ahora, con el modelo atómico introducido en 1913 por Niels Bohr (1885-1962) en plena vigencia, los socorridos espejos y resonadores planckianos del *Gedankenexperiment* original de 1909 cedían su protagonismo a los átomos, que solo podían existir en un conjunto discreto de estados energéticos estacionarios. Eran precisamente las transiciones entre tales estados las que originaban la emisión y la absorción de radiación electromagnética por la materia ordinaria. Al demostrar que en estos procesos no solo había intercambio de energía sino también de impulso, los antiguos cuantos de energía ya se transforman en fotones, auténticas partículas elementales.

Otra variación de este experimento mental sirvió a Einstein en 1925 para deducir la existencia de un campo escalar oscilatorio asociado a cada molécula de gas, idea que Schrödinger reconoció haber tenido gran influencia en su propia formulación de la mecánica ondulatoria, en 1926.¹⁸

Para acabar esta somera referencia a ciertos episodios que condujeron a resultados notables, aun apartándose de la ortodoxia impuesta por un uso estricto del MC, queremos resaltar que existen abundantes casos de aportaciones notabilísimas obtenidas mediante procedimientos un tanto dispares que de ninguna forma se ajustan a la ortodoxia metodológica que venimos comentando. Dejando aparte los abundantes casos de serendipia que nos ofrece la historia de la ciencia —es decir, de descubrimientos *por chiripa* de algo que ni se buscaba ni se sospechaba, como, por ejemplo, los famosos casos de la penicilina, los rayos X o la radiactividad, entre los más conocidos—, hay otros que representan auténticos atentados contra la esencia de los condicionamientos impuestos por el MC.

Citemos, como ejemplo, el *grave error* cometido por el físico bengalí Satyendra Nath Bose (1894-1974) cuando, creyendo emular a su admirado Boltzmann en los tratamientos estadísticos, calculó formas de distribuir fotones en celdas del espacio de las fases considerándolos partículas indistinguibles, cuando, si hubiera seguido fielmente el tratamiento de las moléculas en la teoría cinética de su maestro, habría de haberlos tratado como entes distinguibles, que era como Boltzmann consideraba a las moléculas en sus concepciones estadísticas. El caso es que tal error condujo a Bose hasta la fórmula de Max Planck (1858-1947), que era la expresión cuántica del estado de equilibrio de la radiación del cuerpo negro. No se

18. Para mayor detalle sobre el multiuso de este *Gedankenexperiment* por parte de Einstein, puede verse NAVARRO (2020): pp. 158-166, para la introducción del experimento, en 1909; pp. 258-275, para el papel de este en el nacimiento del fotón, en 1917, y pp. 344-365, para la influencia en la formulación de la mecánica ondulatoria, en 1926.

le escapó al lince Einstein que si él cometía el mismo *error* que Bose y, contra la ortodoxia clásica de Boltzmann, trataba las moléculas de gas como indistinguibles, posiblemente obtendría una teoría cuántica para los gases ideales, como así sucedió. Es notorio que ello dio lugar a la aparición de una nueva disciplina: la primera mecánica estadística cuántica, que precedió en un año a la formulación de la propia mecánica cuántica (Navarro, 2020, pp. 306-334).

7. CONCLUSIÓN

En esta tímida aproximación, hemos tratado de poner de manifiesto las grandes dificultades —insuperables, tal vez— que conlleva todo intento de establecer unas características claras que permitan delimitar con rigor los márgenes en los que se debe encuadrar la noción de MC. Aunque gran parte de las consideraciones hasta aquí expuestas sobre el MC se han basado en la figura de Einstein como científico creador, son innumerables los episodios históricos a los que podríamos haber recurrido para apoyar nuestras afirmaciones. Los grandes científicos no se han vestido con un ropaje metodológico preciso, sino que, como hemos apuntado, se han valido para sus pesquisas de preconcepciones, de intuiciones personales y de toda forma de proceder que les fuera útil en su investigación. Es en este sentido en el que Paul Feyerabend (1924-1994), tras argumentar su aseveración con el análisis de varios episodios relevantes en la historia de la ciencia, llega a la conclusión de que la construcción de la ciencia es una empresa esencialmente *anarquista*.¹⁹

Lo anterior [la consideración de que la ciencia es una empresa esencialmente anarquista] se demuestra tanto por el examen de episodios históricos como por un análisis abstracto de la relación entre idea y acción. El único principio que no inhibe el progreso es: *todo sirve*.

Sin llegar a tales extremos, sí creemos haber dejado constancia de que la creación científica es un proceso de complejidad tal que no puede ser encorsetado en la práctica de ninguna metodología claramente precisa. Observación, inducción, formulación de hipótesis, contraste experimental y demás suelen darse en la génesis de las teorías físicas. Pero no siempre y, por el contrario, frecuentemente la práctica de la investigación científica incorpora elementos adicionales, entre los que hemos destacado la intuición, los preconceptos, la propia filosofía del investigador y también algunos recursos propios, como hemos comentado en el caso de Einstein.

19. FEYERABEND (1986), p. 7. El énfasis aparece en el original.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACON, Francis (2011). *La Gran Restauración* ('*Novum Organum*'). Traducción de Miguel Á. Granada. Madrid: Tecnos. [Publicación original en latín, 1620]
- BORN, Max (ed.) (1971). *The Born-Einstein letters*. Londres: Macmillan. [Traducción inglesa de la versión original alemana de Irene Newton-John, hija de Born, 1969]
- BRUSH, Stephen G. (1976). *The kind of motion we call heat: A history of the kinetic theory of gases in the 19th century*. Ámsterdam: North-Holland. 2 v.
- CANEVA, Kenneth L. (1997). «Physics and *Naturphilosophie*: A reconnaissance». *History of Science*, vol. 35, pp. 35-106.
- DUHEM, Pierre (1902). *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell: Étude historique et critique*. París: A. Hermann. [Traducción española de Miguel Katz (2018). *Duhem y el electromagnetismo de Maxwell*. Buenos Aires: Asociación Química Argentina, pp. 49-214]
- EDDINGTON, Arthur Stanley (1946). *La filosofía de la ciencia física*. Traducción de Carlos Prélat y Alberto Lelong. Buenos Aires: Editorial Sudamericana. [Versión original inglesa, 1939]
- EINSTEIN, Albert (1905). «Über die von molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Annalen der Physik*, vol. 17, pp. 549-560. [Traducción española en STACHEL (ed.) (2001), pp. 81-93]
- (1949). «Autobiographical notes». En: SCHILPP (1970), pp. 1-96. [Traducción española de Sánchez Ron (2005). *Albert Einstein*. Barcelona: Crítica, pp. 43-83]
- FARADAY, Michael (1965). *Experimental researches in electricity*. Nueva York: Dover. [1.ª ed., tres volúmenes aparecidos entre 1839 y 1855]
- FEYERABEND, Paul (1986). *Tratado contra el método: Esquema de una teoría anarquista del conocimiento*. Traducción de Diego Ribes. Madrid: Tecnos. [Versión original inglesa, 1975]
- HERTZ, Heinrich (1892). *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*. Leipzig: J. A. Barth. [Traducción española de una selección de estas *Untersuchungen*: Manuel García Doncel y Xavier Roqué (1990). *Heinrich Hertz: Las ondas electromagnéticas*. Barcelona: Publicacions de la UAB: Edicions de la UPC]
- HOLTON, Gerald (1982). *Ensayos sobre el pensamiento científico en la época de Einstein*. Traducción de José Otero. Madrid: Alianza Universidad. [Versión original inglesa, 1972]
- NAVARRO, Luis (2020). *El desconocido Albert Einstein: Sin rastros de relatividad*. Barcelona: Tusquets.
- NIVEN, William Davidson (ed.) (1965). *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Nueva York: Dover. 2 v. [1.ª ed., 1890]
- MAXWELL, James C. (1856). «On Faraday's lines of force». *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. 10, pp. 27-83. [Reimpreso en Niven, 1965, vol. 1, pp. 155-229]
- (1861). «On physical lines of force». *Philosophical Magazine*, vol. 90, pp. 11-23. [Reimpreso en Niven, 1965, vol. 1, pp. 451-513]
- (1865). «A dynamical theory of the electromagnetic field». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, pp. 459-512. [Reimpreso en Niven, 1965, vol. 1, pp. 526-597]
- (1954). *A treatise on electricity and magnetism*. Nueva York: Dover. 2 v. [1.ª ed., 1873]
- REICHENBACH, Hans (1949). «The philosophical significance of the theory of relativity». En: SCHILPP (ed.) (1970), pp. 289-311.
- SCHILPP, Paul Arthur (ed.) (1970). *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. La Salle, Illinois: The Open Court. [1.ª ed., 1949]
- STACHEL, John (ed.) (2001). *Einstein 1905: un año milagroso: Cinco artículos que cambiaron la física*. Traducción de Javier García Sanz. Barcelona: Crítica. [Versión original inglesa, 1998]

Einstein i les matemàtiques

Sebastià XAMBÓ DESCAMPS
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

*A Joan Girbau, in memoriam, per la seva humanitat
i els seus llargs i fructífers mestratges.*

Aquest escrit és una ampliació del que es va publicar, amb el mateix títol, al número 52 de la revista *SCM/Notícies* de la Societat Catalana de Matemàtiques (setembre 2023, p. 69-78), el qual es va basar en la conferència que vaig impartir a l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el 3 de febrer de 2023 amb motiu de la inauguració de l'exposició «Einstein i l'actualitat de les seves contribucions», promoguda per Antoni Roca Rosell en commemoració de la visita d'Albert Einstein a Barcelona el febrer de 1923.

També vaig aprofitar, per a l'article esmentat, alguns matisos de la sessió de dues hores impartida a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) el 17 d'abril de 2023 per a l'assignatura «Albert Einstein i la ciència i la tècnica del segle xx» (quart curs del grau d'enginyeria industrial de la Universitat Politècnica de Catalunya [UPC]), arran de l'amable invitació de la professora responsable de l'assignatura, Maria Rosa Massa. Aquesta sessió es va repetir el 22 d'abril de 2024, amb algunes variacions que també he tingut en compte.

Si no es declara altrament, les citacions són traduccions pròpies al català de fragments de les notes autobiogràfiques d'Einstein [1], i en aquest cas els èmfasis no apareixen a l'original.

1. UN SAGRAT LLIBRE DE GEOMETRIA

A l'autobiografia d'Einstein [1], llegim:

Als dotze anys vaig viure una segona meravella d'una naturalesa totalment diferent [la primera, als cinc anys, fou l'encís que li produí una brúixola]: un petit llibre de geometria plana euclidiana que va arribar a les meves mans a principis del curs escolar. Afirmacions no evidents, com, per exemple, que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt, es podien demostrar amb tanta certesa que qualsevol dubte semblava fora de qüestió. *Aquesta lucidesa i certesa em van causar una impressió indescriptible.*

I tot seguit recorda que

un oncle [Jacob Einstein] em va explicar el teorema de Pitàgores [i la demostració d'Euclides, que trobà complicada] abans d'obtenir aquell «sagrat» llibret de geometria. Després de molt d'esforç vaig aconseguir provar aquest teorema sobre la base de la semblança dels triangles.

Els estudiosos [2] consideren que es tracta de la demostració (coneguda, però nova per a ell) basada en la semblança del triangle ABC amb els triangles ACD i CBD de la figura 1.

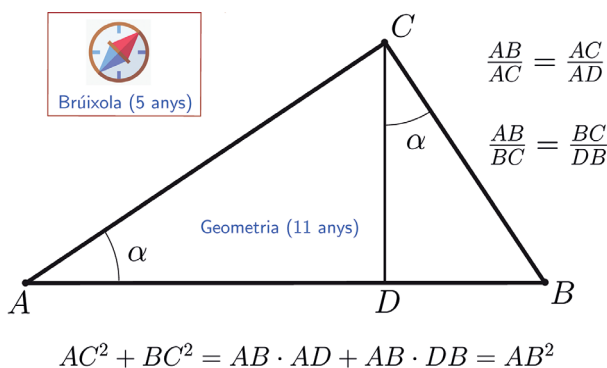


FIGURA 1. Dues fascinacions cognitives d'infantesa.

FONT: Elaboració pròpia.

Des dels dotze fins als setze anys em vaig familiaritzar amb els elements de les matemàtiques juntament amb els principis del càlcul diferencial i integral. En fer-ho vaig tenir la sort de trobar llibres que no eren gaire particulars pel que fa al rigor lògic, però que ho compensaven deixant que els pensaments principals destaquessin de manera clara i sinòptica. Aquesta ocupació era, en conjunt, realment fascinant; es van assolir clímax comparables amb els de la geometria elemental: la idea bàsica de la geometria analítica, les sèries, els conceptes de diferencial i integral.

Està documentat (per exemple, a [3]) que durant l'escolarització al Luitpold-Gymnasium de Múnic (1888-1895) tingué Adolf Sickenberger com a professor de matemàtiques i que, en conseqüència, estudià els seus diversos textos sobre matemàtica elemental (entre els quals, probablement, el sagrat llibre de geometria). Cal remarcar, també, la influència de Max Talmud, un estudiant de medicina que els Einstein van acollir a casa seva a dinar els dijous des de 1889 fins a 1894. Talmud tenia onze anys més que Einstein i li feu de mentor. Per exemple, Einstein aprenqué per si sol als catorze anys el càlcul diferencial i integral estudiant un llibre de Heinrich Borchert Lübsen proporcionat per Talmud:

També vaig tenir la sort de conèixer els resultats i mètodes essencials de tot el camp de les ciències naturals en una excellent exposició popular, que es va limitar gairebé en tot moment a aspectes qualitius, una obra de cinc o sis volums que vaig llegir amb una atenció sense alè.

Finalment, «havia estudiat ja una mica de física teòrica i, als disset anys, vaig entrar a l'Institut Politècnic de Zúric [ETH]».

2. ESTUDIANT A L'ETH

Primer, un incís. Einstein abandonà els estudis al Luitpold-Gymnasium de Múnic a finals de desembre de 1894 (tenia quinze anys). Sembla que fou una reacció a desavinences amb algun professor, potenciada per l'enyorança de la seva família, que havia traslladat el negoci familiar al nord d'Itàlia per intentar superar les dificultats econòmiques amb què es trobà a Múnic. El cas és que Einstein viatja a Itàlia, on passa sis mesos, decideix renunciar a la nacionalitat alemanya (on hauria d'haver fet dos anys de servei militar), i als setze anys és admès als exàmens d'ingrés a l'ETH de Zúric. Té dos anys menys que l'edat normal d'entrada i no reïx: tot i treure bones notes de matemàtiques i física, suspèn llengües modernes, zoologia i botànica.

A suggeriment del director de l'ETH, es matricula a un curs preparatori a l'escola cantonal d'Aarau, el certificat del qual equivalia a superar l'examen d'entrada a l'ETH (en l'avaluació final dels estudiants hi participaven professors d'aquesta escola). Del seu curs, va ser el millor en àlgebra, geometria, física i alemany, i notable en geometria descriptiva i química. En canvi, va ser dels darrers en dibuix i dibuix tècnic, francès i geografia. La mala puntuació de francès contrasta amb el contingut premonitori de l'assaig que va escriure per a l'examen (amb faltes d'ortografia i de gramàtica), ja que hi va exposar amb tota precisió què esperava aconseguir, si obtenia el diploma, amb la carrera universitària [3]. Obtingut el diploma, va entrar a l'ETH com a estudiant de matemàtiques i física. Entre els companys

d'estudis, Marcel Grossmann i Mileva Marić tindran un paper important en la vida d'Einstein. D'aquella etapa (1896-1900), a l'autobiografia diu:

Allà vaig tenir professors excel·lents (per exemple, Hurwitz i Minkowski), de manera que realment podria haver obtingut una bona educació matemàtica. Tanmateix, vaig treballar la major part del temps al laboratori de física, fascinat pel contacte directe amb l'experiència. La resta del temps el vaig passar, principalment, a casa estudiant els treballs de Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, etc. El fet de descuidar fins a cert punt les matemàtiques no era a causa només del meu més gran interès per les ciències naturals, sinó també per la impressió que les matemàtiques estaven dividides en nombroses especialitats, cadascuna de les quals podia acaparar fàcilment la curta vida que ens és concedida. En conseqüència, em vaig veure en la posició de *l'ase de Buridan*, que era incapaç de decidir a quin feix de fenc dirigir-se. Això raïa, òbviament, en el fet que *la meua intuïció no era prou forta en el camp de les matemàtiques* per diferenciar clarament el fonamentalment important, allò que és realment bàsic, de la resta de l'erudició més o menys prescindible.

Més endavant, declara que en la seva època d'estudiant

no comprenia encara que *l'accés als coneixements fonamentals i més profunds de la física anava lligat als mètodes matemàtics més subtils, una constatació que vaig anar capint en el decurs d'anys de treball científic independent.*

Només hi havia dos exàmens finals; altrament, es podia fer més o menys el que un volgués, especialment, com era el meu cas, si comptava amb un amic [Marcel Grossmann] que assistia regularment a les classes i em deixava els seus acurats apunts. Això em donava llibertat en l'elecció de les meves ocupacions fins pocs mesos abans de l'examen, llibertat de la qual jo vaig gaudir plenament i a canvi de la qual pagava molt a gust, com a mal molt menor, la mala consciència que comportava.

I així obté, el juliol de 1900, el diploma de l'ETH, junt amb tres companys de promoció (Mileva Marić no és aprovada en aquesta ocasió, com tampoc en la següent, juliol de 1901), i mentre aquests tres obtenen una plaça d'ajudant a l'ETH, ell no ho aconsegueix, i de fet tampoc no obté, en els dotze mesos següents, un lloc de treball estable en institucions públiques, però sí diversos contractes temporals en entitats privades.

Tanmateix, el desembre de 1900 acaba un article sobre capillaritat (forces intermoleculars) que és acceptat als *Annalen der Physik*. És el seu primer article científic. El febrer de 1901 obté la nacionalitat suïssa, que no abandonarà mai, i es deslliura del servei militar (peus plans i varius). També presenta, el novembre

de 1901, una tesi doctoral a la Universitat de Zúric (sobre un tema de teoria cinètica dels gasos), que no és admesa. A principis de 1902 s'estrena com a pèrit de tercera classe a l'Oficina Suïssa de Patents, a Berna, el 1903 contreu matrimoni amb Mileva Marić i el 1904 neix el seu fill Hans Albert, que arribarà a ser un enginyer prestigiós.

En el front científic, de 1902 a 1904 publica quatre articles més als *Annalen der Physik*. Versen sobre diversos aspectes de termodinàmica i física estadística i, sens dubte, foren molt importants per al seu desenvolupament científic, però no afegien gaire al que ja era conegut. Per exemple, el mateix Einstein explica que

no estant familiaritzat amb les investigacions de Boltzmann i Gibbs que havien aparegut anteriorment, i que *realment esgotaven el tema*, vaig desenvolupar la mecànica estadística i, basant-me en aquesta, la teoria cineticomolecular de la termodinàmica.

El 1910 va escriure que, si hagués conegut el llibre de Gibbs, no hauria publicat els articles sobre els fonaments de la mecànica estadística, llevat d'alguns comentaris [4, p. 55].

3. 1905: ANNUS MIRABILIS

El 17 de març acaba l'article [5] sobre la hipòtesi dels *quanta* de llum. El 30 d'abril completa la memòria «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen» («Una nova determinació de les dimensions moleculars» [6], dedicada «al meu amic Sr. Dr. M. Grossmann», que presenta com a tesi doctoral a la Universitat de Zúric (acceptada el 15 de juliol). L'11 de maig, l'article sobre el moviment brownià [7] és rebut als *Annalen der Physik* (hi mostra que partícules de l'ordre d'una micra suspeses en un líquid han d'experimentar, a causa dels xocs que reben de les molècules d'aquest líquid, un determinat moviment aleatori, de manera que explica, per primera vegada, les observacions de Robert Brown un segle abans per a diverses menes de partícules).

La mateixa revista rep tres articles més: 30 de juny, primer article sobre relativitat especial [8]; 27 de setembre, segon article sobre relativitat especial [9] (estableix la fórmula $E = mc^2$); 19 de desembre, un segon article sobre el moviment brownià [10]. Vegeu [4, p. 111-112], per l'extraordinari impacte dels articles esmentats en termes del nombre de citacions fins a 1982, un nombre que no ha parat de créixer fins avui. En aquest impacte sobresurten [6], que va establir de manera definitiva l'existència d'àtoms i les seves dimensions (fins aleshores negada per prominents figures, especialment, Ernst Mach i Wilhelm Ostwald, per als quals la termodinàmica no es podia basar, tal com havia mostrat Ludwig Boltzmann,

en la mecànica d'uns àtoms inobservables), i els articles sobre el moviment brownià, dels quals Roger Penrose diu, en el seu pròleg a [11], que l'anàlisi d'Einstein per si sola li hauria valgut un lloc en la història, ja que «va establir les bases d'una part important del coneixement estadístic que ha tingut enormes implicacions en nombrosos camps» (Marian Smoluchowski, en treballs independents, aconseguí resultats similars).

És oportú citar aquí el magnífic llibre [12], que no tan sols reproduïx els articles [5], [7] i [8] en versió original i amb unes excel·lents traduccions al català, sinó que, per a cadascun, se'n presenta el context històric, un estudi del contingut i una apreciació de l'impacte. A més, el primer capítol («Un jove agosarat i feliç»), junt amb una acurada cronologia que el precedeix, constitueixen una admirable semblança d'Albert Einstein.

4. RELATIVITAT ESPECIAL

The core of relativity theory consists of a new physical theory of space and time, and we specifically say «physical» rather than «philosophical» because this theory can be tested experimentally.

W. RINDLER, *Essential relativity*, p. 1.

Relativity describes Nature from quark to cosmos. Relativity empowers its user to ponder deeply, to analyze widely, to predict accurately. It is a theory of fantastic innocence, simplicity and power.

E. F. TAYLOR i J. A. WHEELER, *Spacetime physics*.

Entre els sis articles de 1905 mereixen una atenció particular els que tracten sobre la relativitat, [8] i [9], reproduïts a [13]. Mentre que els altres quatre són exemples superlatius de modelització físicomatemàtica, tots coronats per valuosos descobriments i aplicacions, els que tracten sobre la relativitat són, potser, els que han tingut una significació més profunda i general, tant física com matemàtica, i Einstein és conscient que configuren un paradigma que supera el de l'espai i el temps absoluts, incloent-hi el concepte d'èter com a mitjà en el qual es propaga la llum:

Newton, perdona'm; tu vas trobar l'únic camí que a la teva època era encara possible per a un home de màxima capacitat intel·lectual. Els conceptes que vas crear continuen regint el nostre pensament físic, encara que *ara sabem que cal substituir-los per altres de més allunyats de l'esfera de l'experiència immediata si aspirem a una comprensió més profunda de la situació.*

L'article [8], sense referències explícites a cap treball anterior, postula el *principi de relativitat (especial o restringit)*, introduït per Henri Poincaré un any abans, segons el qual les *lleis de la física* han de tenir la mateixa forma en tots els sistemes inercials) i el *principi de constància de la velocitat de la llum, c , en tots els sistemes inercials, independentment de l'estat de moviment del focus emissor*. Que les lleis de la mecànica satisfan el principi de relativitat estava entès des de Galileu, però les equacions de Maxwell no són invariants per les transformacions de Galileu i, per tant, el principi de relativitat implica que les transformacions entre sistemes inercials no poden ser les de Galileu.

Pel que fa a la (gens intuïtiva) constància de c , de fet, es dedueix de les equacions de Maxwell del camp electromagnètic, ja que la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques en el buit resulta ser $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, on les constants ε_0 (permitivitat elèctrica del buit) i μ_0 (permeabilitat magnètica del buit) no depenen, pel principi de relativitat, del sistema inercial. De fet, va ser la coincidència de la velocitat de propagació de les ones electromagnètiques que prediuen les equacions de Maxwell amb la velocitat c la que va cristallitzar en la unificació de l'òptica amb l'electromagnetisme, en el sentit d'establir que les ones lluminoses són ones electromagnètiques.

Aquestes observacions no són esmentades fins a [9] (nota a peu de pàgina: «El principi de la constància de la velocitat de la llum, de fet, es desprèn de les equacions de Maxwell»). Tampoc no esmenta resultats que n'aportaven evidència experimental, com ara els d'Albert A. Michelson i Edward W. Morley. Dos anys després, escriu l'article de revisió [14] a petició de Johannes Stark, l'editor de la revista *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* («Anuari de Radioactivitat i Electrònica»), i és una mica més explícit pel que fa a les arrels de la seva teoria de la relativitat, i especialment al paper de la teoria de l'electró de Hendrik A. Lorentz, però ignorant, tal com farà tota la seva vida, les importants aportacions de Poincaré a la teoria de la relativitat (vegeu [15]).

Un incís sobre l'argument de Willem de Sitter (1913), basat en observacions sobre estels dobles, per afirmar la constància de c . L'esquematzem en la figura 2.

Cal dir, també, tal com veurem en el que segueix, que per a velocitats $v \ll c$ (bàsicament, el domini de l'experiència quotidiana) la discrepància entre la física de Galileu-Newton i la relativitat restringida és molt petita, però que és tant més gran quan les velocitats augmenten, com en els acceleradors de partícules o en els raigs còsmics, i, en tot cas, és significativa, fins i tot per a velocitats moderades, quan una gran precisió és indispensable (pensem, per exemple, en els satèl·lits dels sistemes GPS o Galileo).

L'article [14] conté cinc parts. Les tres primeres s'ocupen de la relativitat restringida: cinemàtica (transformacions de Lorentz), electrodinàmica i dinàmica d'una partícula. Els títols de les altres dues seccions són «Zur Mechanik und Ther-

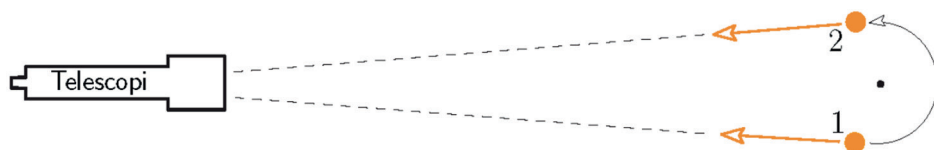


FIGURA 2. Dues posicions, 1 i 2, d'una estrella en òrbita al voltant d'un altre astre. Si la velocitat de la llum depengués de la del focus emissor, la llum emesa a 1 seria més lenta que l'emesa a 2 i es podrien veure al mateix temps dues imatges de l'estrella, cosa que no s'ha observat mai.

FONT: Elaboració pròpia.

modynamik der Systeme» («Sobre mecànica i termodinàmica dels sistemes») i «Relativitätsprinzip und Gravitation» («Principi de relativitat i gravitació») (aquí hi ha la llavor, «el pensament més feliç de la meua vida», que en el període de 1911 a 1915 fructificarà en la relativitat general, és a dir, la teoria relativista del camp gravitatori). La part cinemàtica, que posa de manifest el paper fonamental del grup de Lorentz com a base de la física, és la que té un contingut més matemàtic.

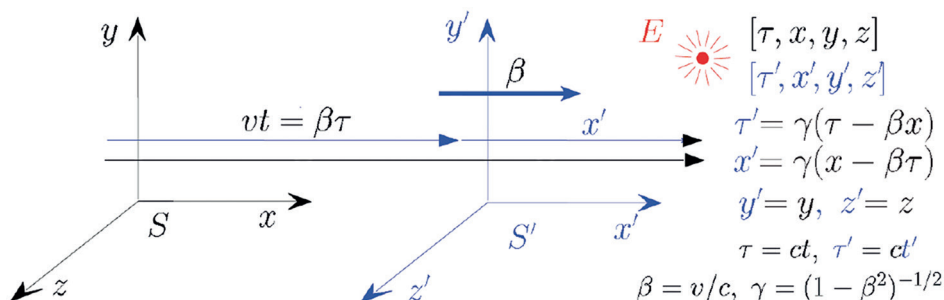


FIGURA 3. Transformació de Lorentz entre dos sistemes inercials, S i S'. Si t i t' s'expressen en segons, τ i τ' són distàncies donades en segons llum.

FONT: Elaboració pròpia.

És adient esmentar aquí que el principi de relativitat, de fet, implica que existeix una constant universal $c \in (0, \infty]$ tal que les equacions que relliguen les coordenades $\mathbf{r} = [\tau, x, y, z] = [\tau, \mathbf{x}]$ d'un esdeveniment en un sistema inercial S amb les coordenades $\mathbf{r}' = [\tau', x', y', z'] = [\tau', \mathbf{x}']$ en un altre sistema inercial S' com en la figura 3 ($\tau = ct, \tau' = ct', t$ i t' són els corresponents temps) tenen necessàriament la forma

$$\tau' = \gamma(\tau - \beta x), x' = \gamma(x - \beta \tau), y' = y, z' = z,$$

on $\beta = \beta(v) = v/c \in [0,1]$, v és la velocitat de S' respecte de S , i $\gamma = \gamma(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Si $c = \infty$, llavors $\beta = 0$, $\gamma = 1$ i les equacions esdevenen les transformacions de Galileu ($x' = x - vt$, $t' = t$). Altrament, les equacions tenen la forma de les *transformacions de Lorentz* (aquesta nomenclatura és deguda a Poincaré) per a la velocitat c . A més, la llei de composició de velocitats té necessàriament la forma

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \beta(v)\beta(v')},$$

on v' i v'' són les velocitats d'un tercer sistema S'' respecte de S' i de S , respectivament. De nou, si $c = \infty$, tenim la composició de velocitats de Galileu, $v'' = v + v'$, i altrament és la *composició relativista de velocitats* per a la velocitat límit c . Atès que la llum emesa per mesons que van quasi a la velocitat c també es propaga a la velocitat c , es desprèn que, de fet, $c = c$. Per a aquestes consideracions, vegeu [16, § 2.11], que comenta:

Així el principi de relativitat necessàriament implica que tots els sistemes inercials estan relacionats per transformacions de Galileu o per transformacions de Lorentz relatives a una certa constant universal « c » [la nostra c]. El paper del segon axioma [d'Einstein] és distingir aquestes dues possibilitats i [decidir] fixar el valor de c com el de la velocitat de la llum, c .

Per a una discussió més matemàtica d'aquestes precisions, vegeu [17, § 10.7]. Les transformacions de Lorentz:

$$\tau' = \gamma(\tau - \beta x), x' = \gamma(x - \beta \tau) \Leftrightarrow \tau = \gamma(\tau' + \beta x'), x = \gamma(x' + \beta \tau'),$$

tenen conseqüències tan sorprenents avui com el 1905 (usem que $\gamma > 0$ per a velocitats $v \neq 0$):

— *Dilatació del temps o retard dels rellotges*. Posant $x' = 0$ (origen del sistema mòbil), obtenim $\tau = \gamma\tau'$ (el temps per S flueix més ràpid que per S'). Com que $\tau' = \tau/\gamma$, també podem dir que per a S els rellotges de S' es retarden.

— *Contracció de longituds*. En el sistema S' , la distància entre els punts $x' = 0$ i $x' = l'$, determinats en un mateix instant τ' , és l' , mentre que relativament a S els extrems del segment són $x_1 = \gamma\beta\tau'$ i $x_2 = \gamma(l' + \beta\tau')$, de manera que per al sistema S la longitud del segment és $l = x_2 - x_1 = \gamma l'$, o $l' = l/\gamma$.

— *Dilatació de la vida mitjana dels muons còsmics*. Els muons còsmics arriben a la Terra a velocitats v properes a la de la llum, de manera que $\gamma \gg 1$. La seva vida mitjana, τ , és tan curta (2,2 μ s) que des d'un punt de vista galileà es desintegrarien a poca distància del punt de l'atmosfera on s'han produït, però des del punt de

vista relativista d'un laboratori terrestre S , la seva vida mitjana serà $\gamma\tau \gg \tau$, cosa que els permet arribar a S abans de desintegrar-se. I com ho veuen els muons? Si fossin galileans, pensarien que han de recórrer una distància l per arribar a S i veurien que la seva vida mitjana τ no és suficient per recórrer-la. Però són relativistes convençuts, i la distància l , per a ells, en realitat, és un recorregut $l' = l/\gamma \ll l$ que poden fer sense morir en l'intent.

— *El rellotge fotònic i l'efecte Doppler relativista.* El rellotge fotònic consisteix en dos miralls paral·lels (figura 4) i un fotó que va de l'un a l'altre. El de l'esquerra de la figura és fix i el de la dreta es mou a velocitat v respecte del fix. Si t és el temps mesurat pel sistema S del rellotge fix de l'arribada del fotó al mirall superior del rellotge mòbil, ct és la distància que ha recorregut, i els miralls mòbils s'han desplaçat vt . Vist des del rellotge mòbil, si el temps d'arribada al mirall superior és t' , la distància recorreguda és ct' , la separació entre els miralls. El teorema de Pitàgores ens permet trobar la relació entre t i t' , tal com s'indica a la figura 4, que no és altra que la ja trobada abans: $\tau = ct = \gamma ct' = \gamma\tau'$. Però el temps t és el que indica un rellotge de S situat al punt d'arribada del fotó en el mirall superior mòbil, i aquest esdeveniment S no el veu fins transcorregut el temps $vt/c = \beta t$, és a dir, el veu en el temps $\bar{t} = t + \beta t = (1 + \beta)t = (1 + \beta)\gamma t' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} t'$.

Com que els temps són inversos de les freqüències, el resultat és que una freqüència ν' emesa per S' és «vista» per S amb freqüència $\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu'$ ($\beta > 0$ quan S' s'allunya de S i $\beta < 0$ quan S' s'apropa a S), que és l'efecte Doppler relativista.

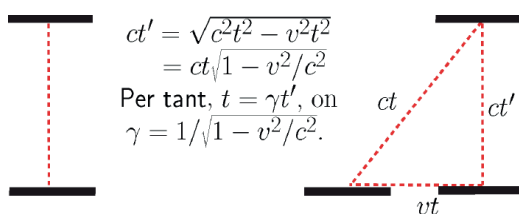


FIGURA 4. Dos rellotges fotònics, un de fix, a l'esquerra, i un de mòbil, a la dreta, que s'allunya a velocitat v del fix.

FONT: Elaboració pròpia.

Els resultats de la part electromagnètica es poden resumir en la taula següent, on $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ denota el camp elèctric i $\mathbf{M} = c\mathbf{B} = c(B_x, B_y, B_z)$, essent $\mathbf{B}$ el camp magnètic, i anàlogament per al sistema (x', y', z') :

$E_x = E_{x'}$	$M_x = M_{x'}$
$E_y = \gamma(E_{y'} + \beta M_{z'})$	$M_y = \gamma(M_{y'} - \beta E_{z'})$
$E_z = \gamma(E_{z'} - \beta M_{y'})$	$M_z = \gamma(M_{z'} + \beta E_{y'})$

Aquestes transformacions posen de manifest un dels descobriments més remarcables de la relativitat restringida: que en l'expressió de $\mathbf{E}$ intervenen $\mathbf{E}'$ i $\mathbf{M}'$, i el mateix passa amb $\mathbf{M}$. Per a velocitats $v \ll c$ (és a dir, $\beta \approx 0$ i $\gamma \approx 1$), s'obté $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}'$ i $\mathbf{M} \approx \mathbf{M}'$, que són les relacions vàlides en el paradigma no relativista. Un cas particular mostra que el camp magnètic és, de fet, un efecte relativista del camp elèctric de Coulomb. En efecte, suposant que a l'origen de S' hi ha una càrrega puntual immòbil i cap camp magnètic, llavors $\mathbf{M} = (0, -\gamma\beta E_{z'}, \gamma\beta E_{y'})$, que és ortogonal a la direcció del moviment $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)$ i al camp elèctric $\mathbf{E} = (E_{x'}, \gamma E_{y'}, \gamma E_{z'})$. Un càlcul immediat mostra que, de fet, $\mathbf{M} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$.

Pel que fa a la part dinàmica, les nocions més innovadores van ser que la massa d'una partícula creix amb la velocitat, tendint a ∞ quan $\beta \rightarrow 1$ ($v \rightarrow c$): $m = \gamma m_0$, on m_0 és la massa en repòs. La velocitat relativista és el 4-vector $\mathbf{u} = [\gamma, \gamma \mathbf{u}]$, on $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ és la 3-velocitat i $\gamma = \gamma_u$ el factor γ d'aquesta velocitat. El moment relativista és el 4-vector $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} = [m, m\mathbf{u}]$ i la força relativista és el 4-vector $\mathbf{f} = \gamma \dot{\mathbf{p}} = \gamma [\dot{m}, \dot{\mathbf{p}}]$ (per a detalls, incloent-hi la deducció de $E = mc^2$, podeu consultar l'arxiu «Relativitat»).¹ Aquesta dinàmica relativista és a la base dels càlculs que regulen el comportament dels acceleradors de partícules, a les quals usualment corresponen factors γ molt grans, i de la comptabilitat energia-massa en la síntesi o desintegració de partícules.

El significat geomètric de la relativitat especial fou descobert per H. Minkowski [18]. L'observació fonamental és que les transformacions de Lorentz coincideixen amb les que deixen invariant la forma quadràtica

$$\eta = \eta(\mathbf{r}) = \tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \tau^2 - \mathbf{x}^2.$$

Que les transformacions de Lorentz vistes anteriorment conserven η (es diu que són isometries de η) és una simple comprovació algebraica. El recíproc, que tota isometria de η és una transformació de Lorentz (general), és més delicat i aquí el passem per alt, però en tot cas queda clar que la relativitat especial es pot veure

1. <https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/MMF/m11-3-Relativitat/m11-3-R-9-NocionsRG.pdf>.

com la geometria, en el sentit de F. Klein, del grup $O_{1,3}$ d'isometries de η . En aquesta presentació hi encaixen perfectament la dinàmica i l'electrodinàmica, i l'article acabà essent un primer pas necessari envers la relativitat general.

Val a dir, a més, que en l'estudi de les isometries de formes quadràtiques de qualsevol signatura el formalisme més adient és el de l'àlgebra geomètrica de Clifford. En el cas de la relativitat, aquest punt de vista està exposat, per exemple, a [19, § 1.4 i cap. 3], on es mostra també la seva idoneïtat per al tractament de l'equació de Paul Andrien Maurice Dirac. Com a referència general sobre aquests formalismes, vegeu [20, cap. 3-5]. En cadascuna d'aquestes dues referències s'aporta una àmplia bibliografia.

5. RELATIVITAT GENERAL

La relativitat general (RG) és una teoria relativista de la gravitació i es considera l'obra mestra d'Einstein [21]. Per a masses petites, la teoria es redueix pràcticament a la teoria de la gravitació newtoniana. Com veurem en el que segueix, en el Sistema Solar la desviació més gran de les òrbites newtonianes és l'avançament de $43''$ d'arc per segle de la posició del periheli de Mercuri i molt menor per als altres planetes. Però per als sistemes de posicionament global de la Terra, que involucren masses i velocitats relativament petites, les correccions relativistes (especial i general) són absolutament indispensables degut a la gran precisió en què cal sincronitzar els temps per ser efectius. Avancem que les «equacions d'Einstein» són la base de la cosmologia i l'astrofísica modernes: estructura a gran escala de l'Univers i la seva evolució, cúmuls de galàxies, formació i evolució de les estrelles, nanes blanques, estrelles de neutrons, forats negres, quàsars, púlsars, ones gravitacionals... Fins ara, la teoria sempre ha estat confirmada per les observacions, cada vegada més exigents (vegeu § 6).

En l'elaboració de la RG van tenir un paper fonamental dos principis. El primer va ser «la idea més feliç de la meua vida» (1907: en una caiguda lliure no es percep la força de la gravetat), que el va dur a postular el *principi d'equivalència* (igualtat entre massa inercial i massa gravitatòria). Això el portà a concebre «l'equivalència física completa d'un camp gravitatori i una acceleració igual del sistema de referència», i a deduir l'alentiment dels rellotges sota un potencial gravitatori i, en particular, l'augment de la longitud d'ona de les ratlles espectrals emeses pels àtoms d'una estrella (el Sol, per exemple). Per a una exposició més detallada sobre alguns aspectes d'aquests inicis, vegeu § A1.

El segon principi és el *principi de relativitat general*, que postula que les lleis de la física han de tenir la mateixa forma no només en coordenades inercials, sinó en qualsevol sistema de coordenades, un enunciat al qual es refereix també com a *covariància* respecte de canvis arbitraris de coordenades.

Matemàticament, això significa que el model de l'univers d'esdeveniments ha de ser una varietat (diferenciable) $\mathcal{M}$ de dimensió 4 i que les lleis físiques s'han de poder expressar en termes de la geometria intrínseca d'aquesta varietat. A l'auto-biografia Einstein reconeix que la dificultat principal que va haver de superar per arribar a aquesta comprensió va ser «alliberar-se de la idea que les coordenades han de tenir un significat mètric immediat».

El treball inicial de 1907, [14], és reprès a partir de 1911. El 1912, en una carta a Sommerfeld, «creu que pot superar totes les dificultats amb l'ajut de M. Grossmann», i afegeix: «Però una cosa és certa: *mai a la meua vida no m'havia preocupat tant per res, i ara veig amb un enorme respecte les matemàtiques, les parts més subtils de les quals considerava fins ara, en la meua ignorància, com un pur luxe!* En comparació amb aquest problema, la teoria especial de la relativitat és un joc de nens». En versions preliminars, explica l'avançament de $43''$ d'arc per segle del periheli de Mercuri i obté que la desviació d'un raig de llum que passa prop del Sol és $1,7''$ (corregeix el valor de $0,84''$ d'arc obtingut el 1911), un valor que es va confirmar per les observacions d'un eclipsi de Sol l'any 1919 i també en eclipsis posteriors (figura 5).

A la sisena edició de l'article «The meaning of relativity», [22, ap. II], llegim: «Els coneixements matemàtics que van permetre establir la teoria general de la relativitat els devem a les investigacions geomètriques de Gauss i Riemann». I de Gauss diu: «Va investigar les propietats mètriques d'una superfície de l'espai euclidià tridimensional, i demostrà que aquestes propietats es poden descriure mitjançant conceptes que es refereixen només a la superfície mateixa [conceptes intrínsecs] i no a la seva relació amb l'espai ambient [extrínsecs]. Com que, en general, no existeix un sistema de coordenades preferit en una superfície, *aquesta investigació va portar per primera vegada a expressar les magnituds rellevants en coordenades generals*». Cal celebrar aquí la publicació de [23] i, en particular, el tractament que fan del *theorem egregium* segons el qual la curvatura, que es defineix extrínsecament, resulta ser un concepte intrínsec (vegeu § A2).

I, de Riemann, Einstein diu [22, p. 63]: «Riemann va estendre la teoria de superfícies de Gauss a espais d'un nombre arbitrari de dimensions (espais amb

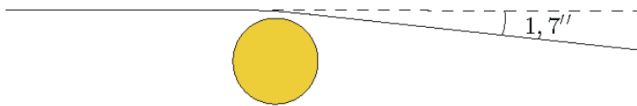


FIGURA 5. Desviació d'un raig de llum pel camp gravitatori del Sol. Valor confirmat per primera vegada per les observacions de l'eclipsi solar de 1919.

FONT: Elaboració pròpia.

mètrica riemanniana, *que es caracteritza per un camp tensorial simètric de segon rang*). En aquesta admirable investigació va trobar l'expressió general de la curvatura en espais mètrics de dimensions superiors». En el desenvolupament de la RG, Marcel Grossmann va tenir un paper important assistint a Einstein en l'assimilació del càlcul tensorial i, en particular, del càlcul absolut de Giorgio Ricci i Tulio Levi-Civita. El 1913 van publicar l'article conjunt [24]. És un esbós de la teoria dividit en una part física, a càrrec d'Einstein, i una part matemàtica, a càrrec de M. Grossmann.

És fonamental observar que la varietat $\mathcal{M}$ ve dotada d'una mètrica natural (tensor simètric covariant d'ordre 2). En efecte, en una referència local en caiguda lliure hi ha, en ser equivalent a un sistema inercial, la mètrica $ds^2 = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta(dx_0, d\mathbf{x})$ de Minkowski (on posem $x_0 = \tau$ i $\mathbf{x} = (x, y, z)$), que en coordenades arbitràries $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ té la forma (usant la regla de sumació respecte d'índexs repetits) $ds^2 = g^{jk} dx_j dx_k$, $j, k \in 0..3$ (g^{jk} funcions de les coordenades x) i, en principi, l'única restricció és que la seva signatura ha de ser (1, 3), que és la signatura de η .² Com és costum, posarem g per denotar aquesta mètrica i direm que $(\mathcal{M}, g)$ és un *espai-temps*. És l'arena en la qual es desenvolupen les investigacions d'Einstein i en les quals les g^{jk} fan el paper de *potencials gravitacionals*, ja que són indicadors de la desviació del sistema de coordenades respecte d'un sistema inercial (una precisió tècnica: l'indicador en realitat és la curvatura de g en el sentit de Riemann). Dit això, l'objectiu principal és trobar les condicions que han de satisfer aquests potencials per tal que corresponguin a la gravetat causada per la distribució de matèria-energia a $\mathcal{M}$, i al final aquestes condicions van acabar quedant codificades en les celebrades *equacions d'Einstein*.

Poc abans d'arribar a establir aquestes equacions, es produí un episodi que no volem passar per alt. El 1915, Einstein imparteix un seminari sobre relativitat a Göttingen. Hi assisteixen David Hilbert, Felix Klein i Hermann Weyl, i Hilbert envia als *Annalen der Physik* les equacions relativistes del camp gravitatori (obtin-

2. Aquesta situació és anàloga a la que es troba a la geometria analítica de les còniques i quàdriques. Per exemple, en el cas d'una el·lipse de semieixos a i b , l'equació en les coordenades x, y relatives als seus eixos és

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

però en coordenades afins generals x_1, x_2 , l'equació adopta la forma

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 + 2g_1x_2 + 2g_2x_2 + g_0 = 0. \quad (*)$$

Inversament, una equació com (*) representa una cònica, possiblement degenerada (vegeu [25], teorema 4.6). Per exemple, en les notacions d'aquest text, (*) representa una el·lipse real precisament quan $D_3 \neq 0$, $d_2 > 0$ i $D_3d_1 < 0$.

gudes resolent un determinat problema variacional) cinc dies abans que ho fes Einstein, però els erudits han mostrat que la prioritat indiscutible és d'Einstein (vegeu l'article «Einstein, Felix Klein, David Hilbert y Hermann Weyl», de Sánchez Ron a [26]).

No podent entrar aquí en profunditat en el tema, em limitaré a descriure breument els malabarismes finals: les analogies que el van guiar i, fins on em sigui possible, mostrar que són ben plausibles. Com a referència per a discussions més detallades, especialment pel que fa a nocions de càlcul tensorial, és molt recomanable el magistral llibre de Joan Girbau, [27].³

En la gravetat de Newton i en l'electroestàtica de Coulomb les forces entre partícules són inversament proporcionals al quadrat de les distàncies. Amb aquesta propietat es pot construir, per una distribució Q de masses o càrregues elèctriques, una funció ϕ (*potencial gravitatori o electroestàtic*) tal que el seu gradient, $\nabla\phi = (\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$, determina la força que Q exerceix sobre una unitat de massa o càrrega en el punt on avaluem $\nabla\phi$. A més, aquest potencial satisfà l'equació de Poisson: $\Delta\phi = k\rho$, on

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\phi$$

és la laplaciana de ϕ , ρ és la densitat (de massa o càrrega elèctrica) de Q i k és una constant ($k = 4\pi G$ en el cas de la gravetat, G és la constant de la gravitació, i $k = -1/\epsilon_0$ en el cas del camp elèctric; els signes contraris provenen del fet que càrregues del mateix signe es repelleixen, mentre que dues masses sempre s'atrauen). Per a una referència en línia relativa al cas electroestàtic, consulteu l'arxiu «Potencial elèctric»⁴ (el cas gravitacional es pot tractar de la mateixa manera). En tot cas, l'estratègia d'Einstein per derivar la seva equació consisteix a imaginar quina forma hauria de tenir l'equació de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ en l'espai-temps.

En l'espai-temps, el paper de ϕ el té, com hem vist, la mètrica g i, per tant, és natural canviar $\Delta\phi$ per una expressió tensorial $\mathcal{E}(g)$ formada amb derivades parcials de g fins a l'ordre 2. D'altra banda, ρ s'ha de substituir per un objecte que expressi el contingut de matèria-energia-moment en cada punt de $\mathcal{M}$. Aquest objecte és el *tensor de tensió-energia* (també anomenat de *energia-impuls* o de *energia-moment*), $T \sim T_{\mu\nu}$ (per a una discussió detallada, vegeu [27, cap. 16]). Vist

3. Aquest llibre aplica els mètodes rigorosos de la geometria diferencial (capítols 1-6) a la física clàssica (capítols 7-13) i a la relativitat (capítols 14-20). En concret: «18. Els fonaments de la relativitat general», «19. Camp gravitatori produït per una estrella» i «20. Models cosmològics».

4. <https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/MMF/m10-2-Electromagnetisme/m10-2-EM-2-PotencialElectric.pdf>.

així, l'equació d'Einstein adopta la forma $\mathcal{E}(g) = \kappa T$, on κ és una constant (*constant d'Einstein*), i com que l'anàlisi mostra que $\text{div}(T) = 0$, [27], $\mathcal{E}(g)$ ha de ser també un tensor d'ordre 2 amb divergència nul·la. I bé, un resultat de Poincaré afirma [27, p. 289] que sota aquestes condicions

$$\mathcal{E}(g) = \text{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg + \lambda g, \text{ on } \text{Ric}(g) \sim R_{jk}$$

és el tensor de Ricci de g , R és la curvatura escalar de g i λ una constant arbitrària, d'on resulta que l'equació d'Einstein ha de tenir la forma

$$\text{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg + \lambda g = \kappa T.$$

La determinació de κ via l'aproximació newtoniana va produir l'expressió $\kappa = 8\pi G/c^2$. Inicialment, Einstein va considerar el cas $\mathcal{E}(g) = \text{Ric}(g)$, però l'equació que en resulta, $\text{Ric}(g) = \kappa T$, és incorrecta, ja que $\text{div}(T) = 0$ i en general $\text{div}(\text{Ric}(g)) \neq 0$. L'elecció $\mathcal{E}(g) = \text{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg$ ja no té aquest defecte, perquè resulta que $\text{div}(\text{Ric}(g)) = \frac{1}{2}Rg$ (que és la raó per la qual va introduir aquest terme). El terme λg és opcional, ja que $\text{div}(g) = 0$, i Einstein el va introduir [28] per aconseguir un model d'univers estacionari, després el va treure en conèixer l'expansió de l'Univers (l'equació d'Einstein implica aquesta expansió, i, per tant, el que s'anomena *big-bang*, però sembla que no se n'adonà fins al 1929). Ara s'inclou λ a causa de l'acceleració de l'expansió de l'Univers (Premi Nobel 2017, vegeu § 6).

La inclusió del terme $-\frac{1}{2}Rg$ a $\mathcal{E}(g)$ és un pas anàleg a la manera com Maxwell va generalitzar l'equació d'Ampère de la magnetoestàtica (és a dir, $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}$, on $\mathbf{j}$ és el vector de densitat del corrent estacionari i $\mathbf{B}$ el camp magnètic) a l'electrodinàmica. En aquest cas, $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{B})) = 0$, però, en canvi, aplicant la llei de conservació de la càrrega elèctrica $\partial_t \rho = -\text{div}(\mathbf{j})$, tenim $\text{div}(\mu_0 \mathbf{j}) = \mu_0 \text{div}(\mathbf{j}) = -\mu_0 \partial_t \rho$, que no s'anulla per a corrents no estacionaris. Ara bé, $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho/\epsilon_0$ (llei de Coulomb-Gauss) i així

$$\partial_t \rho = \partial_t (\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E})) = \text{div}(\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}),$$

d'on es desprèn que $\text{div}(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = 0$. Vista aquesta igualtat, Maxwell va decidir modificar la llei d'Ampère en la forma $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$ *equació d'Ampère-Maxwell*, és a dir, sumant a $\mathbf{j}$ l'expressió $\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$, la qual va anomenar *corrent de desplaçament*.

Un aspecte important de la RG és que les trajectòries de les partícules en caiguda lliure són precisament les geodèsiques de la mètrica g , un fet que generalitza la llei d'inèrcia de Galileu, i les geodèsiques *nul·les* (és a dir, aquelles que el seu vector tangent $\mathbf{u}$ satisfà $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$) són les trajectòries dels raigs de llum (fotons).

És famós l'aforisme de John A. Wheeler per resumir la significació de les equacions d'Einstein: «la matèria li diu a l'espai com s'ha de corbar i l'espai li diu a la matèria com s'ha de moure». I parlant de Wheeler, entre els nombrosos textos dedicats a la RG, l'enciclopèdic *Gravitation*, de Charles W. Misner, Kip S. Thorne i Wheeler (Freeman, 1973, 1.280 p.) il·lustra el domini de la geometria diferencial que van trobar necessari assolir per donar compte cabal de la teoria.

6. CARTOGRAFIANT L'UNIVERS

L'any 1921, Albert Einstein és guardonat amb el Premi Nobel de Física (que no rebrà fins al 1922) «pels seus serveis a la física teòrica, i especialment pel seu descobriment de la llei de l'efecte fotoelèctric». No van esmentar explícitament la relativitat, i és de suposar que la devien considerar dins la llista dels «serveis».

Tot seguit ens fixem en quatre premis Nobel de Física relacionats amb la teoria de la relativitat general. Les investigacions d'aquests guardonats han aportat un coneixement cada vegada més detallat de l'Univers i les seves estructures.

— 1993: Russell A. Hulse i Joseph H. Taylor Jr., «pel descobriment d'un nou tipus de púlsar, un descobriment que ha obert noves possibilitats per a l'estudi de la gravitació». El púlsar en qüestió, anomenat PSR J0348+0432, dista 7.000 anys llum de la Terra i està format per una estrella de neutrons que gira 25 vegades per segon (que és la freqüència de les ones electromagnètiques que emet i que foren les que van permetre descobrir-lo el 1974) i per una estrella nana blanca que orbita el púlsar cada dues hores i mitja. Taylor i Hulse van demostrar que els moviments de les estrelles s'ajustaven perfectament a la pèrdua d'energia ocasionada per l'emissió d'ones gravitacionals com les deduïdes de la RG per Einstein el 1918 (vegeu la figura 6 per a una representació esquemàtica del sistema).

— 2011: Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt i Adam G. Riess, «pel descobriment de l'expansió accelerada de l'Univers mitjançant observacions de supernoves llunyanes». Una bona documentació sobre la significació d'aquesta distinció és la Conferència Nobel de Perlmutter⁵ («Measuring the acceleration of the cosmic expansion using supernovae»). Obre amb la pregunta de quin és el destí de l'Univers i la declaració que aquest destí es pot determinar a partir de la seva història. Però els detalls d'aquestes recerques són complexos, tant en termes matemàtics com físics i computacionals, de manera que ens limitem a recomanar les referències ja donades.

— 2017: Rainer Weiss, Barry C. Barish i Kip S. Thorne,⁶ «per contribucions decisives al detector LIGO i a l'observació d'ones gravitacionals». La primera

5. https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/perlmutter-lecture_slides.pdf.

6. Investit doctor *honoris causa* per la UPC el 2017.

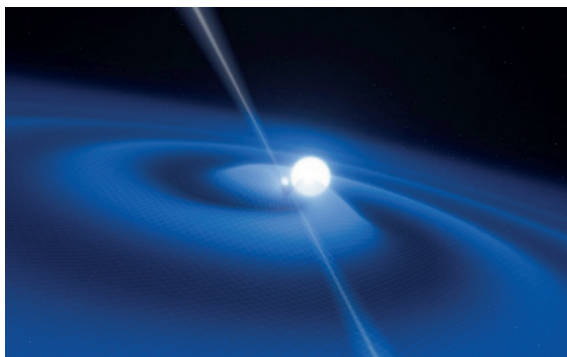


FIGURA 6. Representació esquemàtica de les ones gravitacionals emeses pel púlsar de Taylor i Hulse.

FONT: ESO / L. CALÇADA, «Impresión artística del púlsar PSR J0348+0432 y su compañera enana blanca» (en línia), <<https://www.eso.org/public/spain/images/eso1319c>>, sota llicència Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.

detecció d'aquestes ones es va anunciar el febrer de 2016. Com ja hem dit, una conseqüència de la teoria general de la relativitat d'Einstein és l'existència d'aquestes ones. Són com ondulacions en l'espai-temps que es produeixen quan objectes massius experimenten acceleracions,⁷ com ara els del púlsar de Taylor i Hulse. Els efectes a gran distància són molt petits. A partir de la dècada de 1970 es va desenvolupar el detector LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory). En aquest detector s'utilitza la tecnologia làser per mesurar petits canvis de longitud causats per les ones gravitacionals. Kip S. Thorne ha fet contribucions crucials per desenvolupar el detector i, en particular, per elaborar eines teòriques i de càlcul numèric en RG (*relativitat numèrica*) que van permetre generar un catàleg de simulacions dels senyals que possiblement arribarien al detector [29]. Per a la teoria bàsica de les ones gravitatòries, explicada d'una manera molt assequible, és molt recomanable l'article «Detecció d'ones gravitatòries» de Joan Girbau.⁸

— 2020: Roger Penrose, «pel descobriment que la formació de forats negres és una predicció fiable de la teoria general de la relativitat» (vegeu [30], i [31] per a un estudi sistemàtic), compartit amb Reinhard Genzel i Andrea Ghez «pel descobriment d'un objecte compacte supermassiu al centre de la nostra galàxia». Des

7. Aquest fenomen és anàleg al de l'emissió d'ones electromagnètiques per càrregues elèctriques accelerades.

8. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (en línia), vol. 31, núm. 2 (2016), p. 143-178, <https://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/93710.001/141676>.

de la dècada de 1990, Genzel i Ghez, amb els seus respectius equips de recerca, han desenvolupat i perfeccionat tècniques per estudiar el moviment de les estrelles, i les observacions de les estrelles a la zona al voltant de Sagitari A* al centre de la Via Làctia van revelar l'existència d'un forat negre supermassiu (vegeu la figura 7, esquerra).

Per a més detalls sobre confirmacions experimentals de la RG, i també de la relativitat especial, és molt recomanable la pàgina «Proves de la relativitat general», de la *Viquipèdia*,⁹ i l'article «The confrontation between General Relativity and experiment»¹⁰ (C. M. Will, *Living Rev. Relativity*, vol. 17 (2014), art. núm. 4, 117 p.).

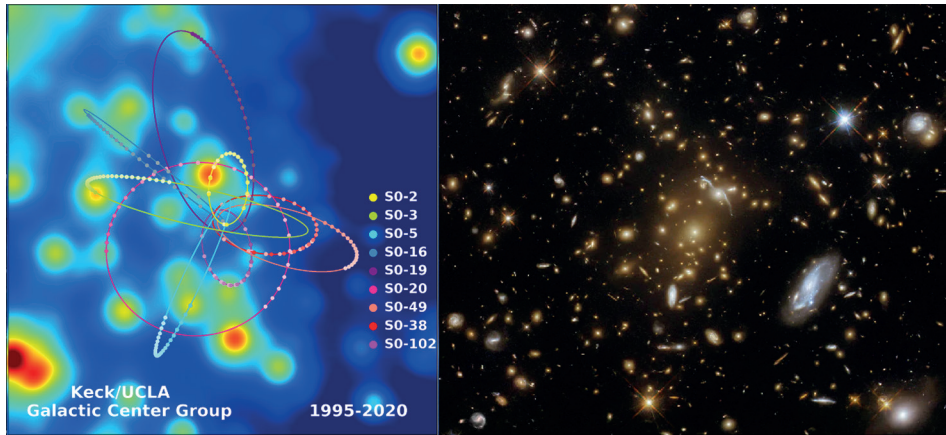


FIGURA 7. Gauss, amb la teoria de superfícies, va fer avançar la cartografia terrestre. Einstein, amb la geometria riemanniana i la relativitat general, ha fet possible elaborar una topografia de l'Univers. Esquerra: les observacions de Genzel i Ghez dels moviments de les estrelles a la zona al voltant del centre de la Via Làctia (en la direcció de Sagitari A*) van revelar l'existència d'un forat negre supermassiu ($4,3 M_{\odot}$, on $\odot$ representa la massa del Sol) i el 2022 es va fotografiar amb l'Event Horizon Telescope (*Viquipèdia*, Sagitari_A*). Dreta: imatge d'un cúmul de galàxies fotografiat pel telescopi Hubble i que actua com una lent gravitacional per a la llum de les galàxies més llunyanes, una mostra de la forta curvatura creada per grans masses.

FONT: A l'esquerra, UCLA GALACTIC CENTER GROUP - W. M. KECK OBSERVATORY LASER TEAM, «Stellar Orbits in the Central Arcsec» (en línia), <<https://galacticcenter.astro.ucla.edu/images.html>>. Aquesta imatge ha estat creada per la professora Andrea Ghez i el seu equip de recerca a la UCLA i prové de conjunts de dades obtinguts amb els telescopis W. M. Keck. A la dreta, NASA, ESA i Hubble Space Telescope (HST).

9. https://ca.wikipedia.org/wiki/Proves_de_la_relativitat_general.

10. <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-4>.

7. LLEGATS DE FÍSICA QUÀNTICA I FÍSICA ESTADÍSTICA

Pel que fa a ramificacions dels treballs d'Einstein enfocats a qüestions de física quàntica i física estadística, que sempre tenen un rerefons matemàtic apreciable, és oportú esmentar primer cinc premis Nobel més:

— 1923: Robert A. Millikan, «pel seu treball sobre la càrrega elemental de l'electricitat i sobre l'efecte fotoelèctric». Tanmateix, la motivació de Millikan a l'inici era provar que l'explicació d'Einstein de l'efecte fotoelèctric (corrent produïda en il·luminar una superfície metàl·lica amb una radiació electromagnètica d'una determinada freqüència ν) havia de ser errònia pel fet de no ser compatible amb la teoria ondulatoria de la llum. Però va canviar d'opinió en anar comprovant, al llarg de deu anys, la gran precisió amb què les seves dades experimentals s'ajustaven a la predicció teòrica d'Einstein, condensada en l'equació $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - P$, on el primer terme és l'energia cinètica d'un electró després del metall pel quàntum d'energia $h\nu$ de la radiació incident sobre el metall, la constant de Planck, i P el treball necessari per arrencar-lo. Del discurs d'acceptació del Premi Nobel¹¹ extraïem les afirmacions següents: «Després de deu anys de proves, [...] el 1914 el treball va aportar, contràriament a les meves expectatives, la validesa exacta, dins dels límits estrets d'error experimental, de l'equació d'Einstein, i també la primera determinació fotoelèctrica directa de la constant de Planck h ». Dels resultats experimentals de Compton (1922), en què es feia palesa la natura corpuscular dels *quanta* $h\nu$, diu que mostren «la fecunditat de la hipòtesi d'Einstein» i que «es pot dir sense dubtar que no és només l'equació la que està tenint un èxit extraordinari en aquest moment, sinó també la concepció d'Einstein». Després de subratllar «l'aplicabilitat molt general de l'equació d'Einstein», li sembla que la seva validació «potser és l'assoliment més conspicu de la física experimental durant l'última dècada». Així ho degué pensar el Comitè Noruec del Nobel.

— 1926: Jean Baptiste Perrin, «pel seu treball sobre l'estructura discontinua de la matèria, i especialment pel seu descobriment de l'equilibri de sedimentació». Perrin va sostenir que si les molècules fossin reals, llavors les partícules suspeses en un líquid no baixarien totes al fons, sinó que es distribuïrien en la direcció vertical de manera anàloga a com ho fan les molècules d'aire en l'atmosfera, és a dir, un decreixement exponencial de la pressió (osmòtica en el cas de les dissolucions: *distribució de Perrin*). El 1908 va comprovar-ho mitjançant l'experimentació. També va corroborar la teoria d'Einstein que el moviment brownià es devia a col·lisions entre les partícules i les molècules del líquid.

— 1964: Charles H. Townes, Nicolay G. Basov i Aleksandr M. Prokhorov, «per treballs fonamentals en el camp de l'electrònica quàntica, que han donat lloc a la

11. <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/millikan-lecture.pdf>.

construcció d'oscilladors i amplificadors basats en el principi màser-làser». El principi físic en qüestió és l'*emissió estimulada*, un descobriment teòric d'Einstein publicat el 1917 amb el títol «Zur Quantentheorie der Strahlung» («Teoria quàntica de la radiació»), però la història de la invenció de màsers i làsers, dècades després, és molt complicada (vegeu «Làser»)¹². Pel que fa al premi Nobel, té molt d'interès llegir la conferència Nobel de C. H. Townes («Production of coherent radiation by atoms and molecules»)¹³. Una petita mostra: «[...] ja el 1917, Einstein va examinar amb cert detall la naturalesa de les interaccions entre les ones electromagnètiques i els àtoms guiat per arguments termodinàmics, i una revisió de les seves conclusions gairebé immediatament suggereix una manera en què els àtoms o les molècules poden ser usats per amplificar la radiació emesa».

— 2001: Eric Cornell, Wolfgang Ketterle i Carl Wieman, «per l'assoliment de la condensació de Bose-Einstein en gasos diluïts d'àtoms alcalins i pels primers estudis fonamentals de les propietats d'aquests condensats». El 1924 Einstein va rebre una carta d'un desconegut Satyendra Nath Bose (Universitat de Dacca, Índia) amb una còpia d'un article, escrit en anglès, en el qual dedueix l'espectre de la radiació del cos negre amb un argument purament estadístic, sense cap referència a l'electrodinàmica. Li havien rebutjat al *Philosophical Magazine* i demanava a Einstein que intercedís, si trobava suficient mèrit en el treball, per publicar-lo a *Zeitschrift für Physik*. Einstein va traduir l'article a l'alemany (vegeu la versió en anglès)¹⁴ i el va enviar a la revista amb aquesta nota: «Al meu entendre, la derivació de Bose de la fórmula de Planck constitueix un avenç important. El mètode utilitzat aquí també serveix, com mostraré amb més detall en un altre lloc, per bastir la teoria quàntica dels gasos ideals». Aquesta teoria la va publicar a les actes de l'Acadèmia Prussiana de les Ciències amb el títol «Quantentheorie des einatomigen idealen Gases» («Teoria quàntica dels gasos ideals monoatòmics») a finals de 1924 i principis de 1925 en correspondència a tres sessions de l'Acadèmia, secció de Física Matemàtica. El primer paràgraf és una excel·lent descripció del seu propòsit: «Pròpiament encara no existeix una teoria quàntica dels gasos ideals monoatòmics. Aquesta mancança s'esmenarà a continuació emprant un nou enfocament ideat pel Sr. D. Bose per deduir la fórmula de la radiació de Planck». El resultat teòric d'Einstein prediu l'existència del que des d'aleshores s'anomena *condensat de Bose-Einstein*: a molt baixes temperatures, un gas d'àtoms d'espín enter (bosons) es concentra, de manera que els àtoms queden indistingibles en l'estat de mínima energia (a temperatures suficientment baixes les longituds d'ona de De Broglie són més grans que les distàncies interatòmiques i així els àtoms tendeixen al mateix

12. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Làser>.

13. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1964/townes/lecture/>.

14. <https://wavewatching.net/lost-papers/plancks-law-and-light-quantum-hypothesis/>.

estat quàntic). Set dècades després, el 1995, Eric Cornell i Carl Wieman van aconseguir produir un condensat d'un gas enrarit d'àtoms de rubidi a una temperatura extremament baixa, i poc després ho va aconseguir, independentment, Ketterle amb àtoms de sodi. Però el Premi també esmenta els «primers estudis fonamentals de les propietats d'aquests condensats», com ara els patrons d'interferència entre dos condensats i la constatació que els condensats guarden una relació amb els àtoms que els originen com la de la llum làser amb els fotons d'una lot ordinària. Per a més informació, vegeu l'article «Bose-Einstein condensation in alkali gases»¹⁵ del premi Nobel de Física de 2001 o la Conferència Nobel de Ketterle.¹⁶ El vídeo «The story of Bose-Einstein condensates»¹⁷ (una conferència de Ketterle al Massachusetts Institute of Technology [MIT]) és també molt instructiu.

— 2022: Alain Aspect, John Clauser i Anton Zeilinger, «pels experiments amb fotons entrelaçats, que van establir la violació de les desigualtats de Bell, i per ser pioners en la ciència de la informació quàntica». Esmento aquest Premi per confirmar l'existència de l'entrelaçament quàntic i les seves aplicacions, tot i que Einstein es va esforçar, en el seu temps, a trobar arguments per «provar» que no podia existir. Condensats en el famós article publicat el 1935 en col·laboració amb B. Podolsky i N. Rosen amb el títol «Can quantum mechanical-description of physical reality be considered complete?» (generalment, conegut com a EPR), ha tingut un efecte catalitzador de les èpiques recerques de molts investigadors, especialment John Bell i Richard Feynman, que van culminar en el Nobel de 2022. El paper de Bell és crucial, ja que va ser el primer a demostrar (1966) que «cap teoria física amb variables ocultes locals no pot reproduir totes les prediccions de la mecànica quàntica», però la comprovació experimental, iniciada el 1972 per Clauser (un dels guardonats) i Stuart Freedman, ha resultat ser una epopeia científica d'una gran complexitat teòrica i experimental. Un Nobel molt merescut.

En una entrevista a Alain Aspect¹⁸ en ocasió de ser guardonat amb el Nobel, la darrera pregunta va ser: «Què en penses de la gent que diu que vas demostrar que Einstein estava equivocat?». I Aspect va respondre:

Això es diu sovint del meu experiment, però em sembla que no és gens just. Einstein va plantejar un problema i la seva visió del món el va dur a concloure que la mecànica quàntica era incompleta. Niels Bohr discrepava d'aquesta conclusió. Els experiments que hem estat realitzant per comprovar si la desigualtat de Bell se satisfà (o no) mostren que la mecànica quàntica no es pot completar en les direccions en què Einstein possiblement estigués pensant. Des

15. <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-physicsprize2001-1.pdf>.

16. <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/ketterle-lecture.pdf>.

17. <https://www.youtube.com/watch?v=NoO7XKVmZC8>.

18. <https://www.youtube.com/watch?v=RRUCcCQSQ6E&t=859s>.

d'aquest punt de vista és cert que no tenia tota la raó. Però ell no coneixia els nostres experiments i a la seva època podia pensar que la seva interpretació era compatible amb la física estàndard, de manera que no sabem què n'hauria dit. A més, l'entrellaçament quàntic és una propietat molt important que ell va saber detectar i ensems afirmar com n'era, de sorprenent. Així que a la pregunta responc que el que he mostrat és que Einstein era genial. I si hagués conegut el que tenim avui, ningú sap què hauria dit.

A propòsit d'aquesta resposta, té molt interès llegir l'article «Einstein's mistakes»,¹⁹ de Steven Weinberg, publicat el 2005, en ocasió de l'Any Mundial de la Física, a *Physics Today* de l'American Institute of Physics (AIP).

8. LLEGATS MATEMÀTICS

En l'article de Michael Atiyah, «Einstein and geometry» (*Current Science*, vol. 89, p. 2041-2044), trobem l'apreciació següent:

Einstein va iniciar i va destacar el paper de la geometria en la física fonamental. Cinquanta anys després de la seva mort, els vincles entre la geometria i la física s'han estès significativament amb beneficis per a ambdues parts. A diferència de Newton, Einstein no era un matemàtic. Va utilitzar les matemàtiques d'una manera essencial, però no les va crear i va confiar en els seus col·legues per a l'ajuda tècnica. És encara més notable que les seves idees hagin provocat grans avenços en geometria, fins i tot en parts del tema aparentment allunyades de la física.

Un exemple que ha resultat matemàticament molt fèrtil és el de les *varietats d'Einstein* [32]. Aquests objectes es defineixen com a varietats $(\mathcal{M}, g)$ en les quals la mètrica g satisfà l'equació d'Einstein amb tensor d'energia-impulsió nul, $T = 0$. És, per tant, una condició purament geomètrica i que, per això, té sentit postular-la per a qualsevol dimensió n de $\mathcal{M}$ i qualsevol mètrica g :

$$\text{Ric}(g) - \frac{1}{2}Rg + \lambda g = 0. \quad (*)$$

Prenent traces, ens queda $R - \frac{n}{2}R + \lambda n = 0$, és a dir, $R = \frac{2n}{n-2}\lambda$ (si $n \neq 2$), i és immediat veure que l'equació (*) equival a $\text{Ric}(g) = \lambda g$, on $\lambda = \frac{2\lambda}{n-2}$. I viceversa, l'equació $\text{Ric}(g) = \lambda g$ implica (*) posant $R = \lambda n$ i $\lambda = \frac{n-2}{2}$. Per tant, les varietats d'Einstein queden definides per l'equació

$$\text{Ric}(g) = \lambda g,$$

19. https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/58/11/31/11198769/31_1_online.pdf.

on λ és una constant. La taula següent conté alguns exemples:

<i>Varietat</i>	λ
Espai euclidià E_n	0
L'esfera S^n	$n - 1$
L'espai hiperbòlic H_n	$-(n - 1)$
L'espai projectiu complex $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$	$n + 1$
Varietats de Calabi-Yau	0

Un altre llegat és la qüestió de quina topologia té l'Univers, la qual suscita de manera natural especulacions molt populars, especialment en textos de ciència-ficció, com ara els viatges en el temps, l'existència de tubs que connectin parts allunyades de l'Univers (forats de cuc), el destí de l'Univers com un tot, quina és la natura del *big-bang* i tantes d'altres. Una indagació interessant (vegeu [33]) apunta que la topologia de l'Univers pot ser una *esfera de Poincaré*, que es pot definir com el quocient del grup $SO(3)$ de rotacions de l'espai euclidià E_3 mòdul el subgrup de rotacions que deixen invariant un dodecaedre regular (aquest subgrup té ordre 120, i de fet és isomorf al grup alternat A_5 de permutacions parelles de cinc elements). Potser Salvador Dalí també ho va intuir quan va concebre el quadre *L'últim sopar* (1955).

ANNEXOS

Annex 1. Algunes consideracions sobre l'origen de la RG

Des de 1905 fins a 1916, [Einstein] treballa assíduament per incorporar la gravitació a la relativitat, resultant-ne la teoria de la relativitat general (de natura essencialment geomètrica, atès que «la gravetat és la curvatura de l'espai-temps»), la qual no només és considerada una obra cabdal de la física matemàtica, sinó que fins avui ha superat satisfactòriament totes les proves experimentals a què se l'ha sotmès. El camp d'aplicació fonamental de la relativitat general és la cosmologia. Havent predit el mateix Einstein l'existència d'ones gravitatòries el 1916, la relativitat general és des d'aleshores el fonament de les recerques cosmològiques, des dels forats negres (una altra de les prediccions de la teoria) fins a la mateixa estructura de l'espai-temps.

«Prefaci», *Curs Einstein (2004-2005)* [26].

És molt rellevant l'observació de Galileu interpretant el seu experiment a la torre inclinada de Pisa: «El moviment d'una partícula en un camp gravitatori queda determinat per la posició i la velocitat inicials». En particular, és independent de la massa de la partícula. Tanmateix, cal adonar-se que en la pràctica és difícil observar que la poma i la ploma de Newton cauen des d'una determinada altura de la mateixa manera, ja que a més de la gravetat hi ha la resistència de l'aire i és clar que la ploma cau més lentament. L'observació queda confirmada si es fa en el buit, com ara el que hi ha a la superfície de la Lluna, que els astronautes de l'*Apollo 15* van aprofitar per fer l'experiment.²⁰

Una altra consideració és que les masses gravitatòria, m_G , i inercial, m_I , són iguals (convenint que mesurem l'acceleració produïda per la gravetat amb les mateixes unitats amb què mesurem les acceleracions, com, per exemple, ms^{-2} en el sistema internacional (SI)). En efecte, la força gravitatòria F sobre una partícula ve donada per la relació $F = m_G g$, on g és l'acceleració que produeix la gravetat sobre la partícula, de manera que m_G expressa el grau de sollicitació de la partícula pels camps gravitoris. Però per la segona llei de Newton també tenim $F = m_I g$, on m_I expressa la resistència de la partícula a ser accelerada (en general, $F = m_I a$ per a tota acceleració a), d'on es desprèn que $m_G = m_I$.²¹

20. <https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8>.

21. De fet, hi ha dues nocions de massa gravitatòria, l'*activa* m_a , que crea el camp gravitatori $\mathbf{g} = -G \frac{m_a}{r^3} \mathbf{r}$, i la *passiva* $m'_p = m'_G$, que respon al camp gravitatori: $m'_p \mathbf{g} = -G \frac{m_a m'_p}{r^3} \mathbf{r}$. Intercanviant el paper de les dues partícules, la força que la segona exerceix sobre la primera és $-G \frac{m'_a m_p}{r^3} (-\mathbf{r}) =$

Amb experiments del tipus Eötvös fets durant la dècada de 1880, i repetits posteriorment per Dicke (1964) i Braginski (1972), s'ha comprovat que $m_G = m_I$ amb una precisió de 10^{-12} . Amb Brax (2022)²² la precisió ha arribat a 10^{-15} i s'espera arribar aviat a 10^{-17} . Adonem-nos que la igualtat és implícita en la teoria de Newton de les òrbites planetàries. També s'ha comprovat, via la relació $E = mc^2$, en els acceleradors de partícules.

Com «endevina» el camp gravitatori amb quanta força ha d'estirar dos objectes diferents per tal que tinguin la mateixa acceleració? Això no passa amb la càrrega elèctrica, tot i l'analogia entre la llei de la gravitació de Newton i la llei de Coulomb de les forces elèctriques, ja que la força elèctrica depèn de la càrrega elèctrica i l'acceleració depèn de la seva massa, la qual és independent de la càrrega. Això suggereix una profunda relació entre gravitació i acceleració. Aquesta relació es pot formular amb l'anomenat *principi d'equivalència feble*: per a un observador accelerat respecte d'un sistema inercial, les forces degudes a l'acceleració són indistingibles de les forces d'un camp gravitatori.

Com a il·lustracions tangibles d'aquest principi, podem esmentar que un ascensor en caiguda lliure (com una nau espacial en òrbita al voltant de la Terra) és indistingible d'un camp gravitatori nul (com el que experimenten els astronautes orbitant la Terra). I a la inversa, un observador situat en un ascensor accelerat verticalment (com una nau espacial propulsada per un coet) experimenta el mateix que si es trobés en un camp gravitatori.

Això té conseqüències qualitatives sorprenents, tal com veurem tot seguit: la curvatura dels raigs de llum en un camp gravitatori i l'alentiment dels rellotges situats en el si d'un camp gravitatori.

A la figura 8a, un raig de llum «horitzontal» emès en una cabina accelerada «verticalment» (representada en línia discontinua), tal com el veu una cabina no accelerada (línia contínua). A la figura 8b, el mateix raig de llum tal com el veu la cabina accelerada. Els càlculs mostren que la curvatura d'un raig de llum d'una estrella que passa tangencialment a la superfície del Sol equival a un desplaçament d'1,75'' d'arc de la seva posició ordinària (aquests desplaçaments s'han observat repetidament en eclipsis solars, el 1919 per primera vegada).

Els rellotges es retarden en un camp gravitatori. En efecte, suposem que un fotó de freqüència ν_0 és emès des d'un punt en la direcció d'un camp gravitatori d'intensitat constant g . Quina és la freqüència d'aquest fotó quan ha davallat una

$= +G \frac{m'_a m_p}{r^3} \mathbf{r}$. Però per la tercera llei de Newton, la primera força ha de ser igual a la segona canviada de signe, d'on resulta que $m_a m'_p = m'_a m_p$ és a dir, $m'_a/m_a = m'_p/m_p = m'_G/m_G$. I aquesta igualtat permet veure que si prenem les unitats de manera que $1_a = 1_G$, llavors tenim $m'_a = m'_G$ per a tota massa $m'_G = m'_I$. En resum, podem suposar que els tres conceptes de massa coincideixen.

22. <https://physics.aps.org/articles/v15/94>.

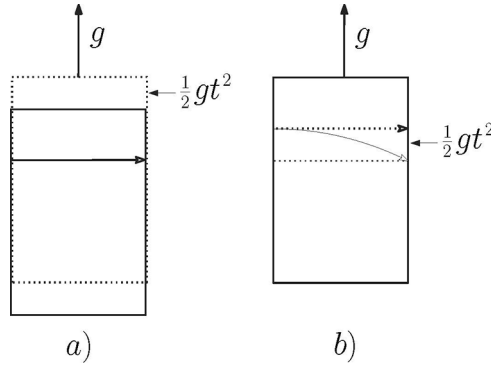


FIGURA 8. El principi d'equivalència feble prediu la curvatura dels raigs de llum en un camp gravitatori.

FONT: Elaboració pròpia.

distància h ? Per respondre a la qüestió, podem canviar, pel principi d'equivalència, el camp gravitatori per una cabina d'altura h sotmesa a una acceleració vertical g . Quina serà la freqüència d'un fotó de freqüència ν_0 emès des del sostre de la cabina quan arriba al terra?

El fotó arriba al terra en el temps $t = h/c$. En aquest instant, la velocitat respecte d'un observador estacionari és $v = gt = gh/c$. Per l'efecte Doppler relativista, la freqüència ν_1 del fotó serà, atès que $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \simeq 1 + \beta$,

$$\nu_1 \simeq \nu_0(1 + \beta) = \nu_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right),$$

on $\Delta\phi = gh$ és la diferència del potencial gravitatori entre el sostre i el terra de la cabina. Si posem $t_0 = 1/\nu_0$, $t_1 = 1/\nu_1$, llavors $t_0 \simeq t_1 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$ o $t_1 \simeq t_0 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$.

Per exemple, si un fotó de freqüència ν_1 és emès a la superfície d'una estrella de massa m i radi r , la freqüència ν_0 en què és rebut lluny de l'estrella serà

$$\nu_0 = \nu_1 / \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \simeq \nu_1(1 - Gm/rc^2),$$

ja que $\Delta\phi = 0 - \left(-\frac{Gm}{rc^2}\right) = Gm/rc^2$. Hi ha un desplaçament cap al roig de la freqüència rebuda, comprovada experimentalment en multitud de circumstàncies. Per a altres confirmacions enginyoses, vegeu «The weight of light»²³ i també l'article citat a la nota 8.

23. <https://physics.aps.org/story/v16/st1>.

I una remarca final. La teoria relativista de la gravetat ha de ser necessàriament *no lineal*, a causa de la relació $E = m/c^2$. En efecte, a l'energia d'un camp gravitatori correspon una massa, la qual, al seu torn, crea camp gravitatori. En això, la gravitació és totalment diferent del camp elèctric, ja que a l'energia d'aquest no hi correspon cap càrrega elèctrica. Adonem-nos d'una altra diferència: la gravitació afecta totes les partícules, mentre que l'electromagnetisme només afecta les partícules carregades.

Annex 2. Notes sobre curvatura

Sigui C (figura 9) una corba plana. La derivada T' del vector tangent unitari T respecte de s (el paràmetre arc de C) en un punt P és perpendicular a T (deriveu la relació $T \cdot T = 1$) i, per tant, T' és proporcional al vector normal unitari N a C en el punt P : $T' = \kappa N$. El coeficient κ és la curvatura de C en el punt P ; $r = 1/\kappa$, el radi de curvatura de C en el punt P , i la circumferència de centre $O = P + rN$ i radi r , el *cercle osculador* de C en el punt P .

Considerem ara un punt P d'una superfície S (figura 10). Sigui κ la curvatura de la secció de S per un pla π que passa per P i conté el vector N perpendicular a S en el punt P . Les *curvatures principals* de S en el punt P , κ_1 i κ_2 , són el mínim i el màxim de κ en fer girar π al voltant del vector N , i és un fet que els plans corresponents π_1 i π_2 són perpendiculars. La *curvatura de Gauss* de S en el punt P es defineix com el producte $K = \kappa_1 \kappa_2$. Aquesta definició és *extrínseca*, en el sentit que depèn de la manera com S està immersa a l'espai euclidià E_3 , però, tal com ja hem esmentat, resulta ser un concepte intrínsec (*teorema egregi* de Gauss), en el sentit

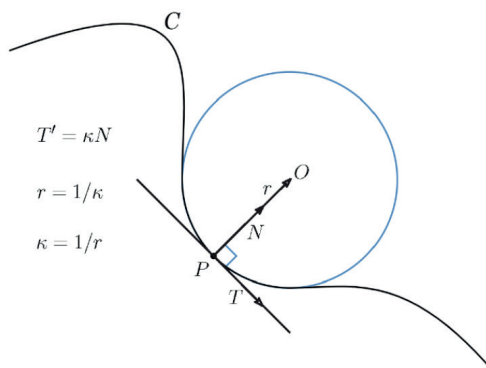


FIGURA 9. Curvatura κ i radi de curvatura $r = 1/\kappa$ d'una corba plana C en un punt P .

FONT: Elaboració pròpia.

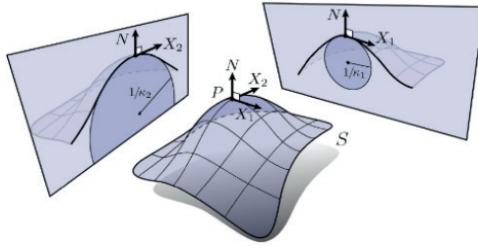


FIGURA 10. Definició de la curvatura de Gauss $K = \kappa_1 \kappa_2$ en un punt P d'una superfície S com el producte de les curvatures principals κ_1 i κ_2 de S en el punt P .

FONT: Elaboració pròpia.

que només depèn de la mètrica g de la superfície, la forma quadràtica de la qual té la forma $ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$ en coordenades paramètriques x_1, x_2 .

Els exemples següents s'obtenen per càlcul i es poden trobar en els llibres que tracten de geometria diferencial de superfícies, com ara [23] o, en un context més general, en el magnífic text [34], especialment els capítols 2 (sobre corbes) i 3 (sobre superfícies).

— La curvatura de la superfície representada explícitament per la relació $z = f(x, y)$ ve donada per la fórmula $K = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)/(1 + f_x^2 + f_y^2)^2$.

— La curvatura de la superfície donada per l'equació implícita $F(x, y, z) = 0$, per la fórmula $K = -\frac{\begin{vmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{vmatrix}}{|\nabla F|^4}$, on $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ (gradient de F), i

$$H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{pmatrix} \text{ (el hessà de } F\text{)}.$$

— En general, l'expressió de K per a una superfície definida per coordenades paramètriques x_1, x_2 ve donada (posant $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$), per la fórmula ([23], p. 48):

$$\begin{aligned} 4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2 K &= g_{11}(\partial_2 g_{11} \partial_2 g_{22} - 2\partial_1 g_{11} \partial_2 g_{22} + (\partial_1 g_{22})^2) \\ &+ g_{12}(\partial_1 g_{11} \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{11} \partial_1 g_{22} - 2\partial_2 g_{11} \partial_2 g_{12} + 4\partial_1 g_{12} \partial_2 g_{12} - 2\partial_1 g_{12} \partial_1 g_{22}) \\ &+ g_{22}(\partial_1 g_{11} \partial_1 g_{22} - 2\partial_1 g_{11} \partial_2 g_{12} + (\partial_2 g_{11})^2) \\ &- 2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(\partial_2^2 g_{11} - 2\partial_1 \partial_2 g_{12} + \partial_1^2 g_{22}). \end{aligned}$$

AGRAÏMENTS

Em plau reconèixer i agrair a l'enginyer Miquel Peral i Descamps les entusiastes explicacions sobre Einstein i la relativitat quan jo estava a sisè de batxillerat i ell acabant la carrera. Sense aquelles converses, molts dels gaudis que m'ha aportat l'estudi d'aquests temes al llarg dels anys potser no haurien existit. També em plau reconèixer el positiu influx de la labor de difusió científica de Jaume Puigbò, particularment a través de les seves *Newsletters* i *Píndoles científiques* [35], d'un remarcable abast multidisciplinari: «Una panoràmica sobre els darrers descobriments científics i una reflexió sobre l'economia, l'empresa i la tecnologia actuals». Gràcies també a Antoni Roca, per l'organització de l'exposició «Einstein i l'actualitat de les seves contribucions», per la invitació a participar-hi amb la conferència del 3 de febrer de 2023 i per l'oportunitat de contribuir en aquest llibre amb aquest capítol.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- [1] A. EINSTEIN, *Autobiographical notes*, Open Court Publishing, 1949. Incloses, en alemany i anglès, a P. A. SCHILPP (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Tudor Publishing Company, 1951, p. 1-95, coll. «Library of Living Philosophers». Publicades en castellà a A. EINSTEIN, *Notas autobiográficas*, amb un pròleg de P. A. Schilpp, Alianza, 1984, coll. «El Libro de Bolsillo».
- [2] G. J. HOLTON i Y. ELKANA (ed.), *Albert Einstein: Historical and cultural perspectives*, Dover Publications, 1997. L'article de B. Hoffmann, «Some Einstein anomalies» (p. 91-105), dedica la primera secció a la geometria (p. 91-93) i pondera el fet que la demostració d'Einstein del teorema de Pitàgores es produís abans de conèixer el «sagrat» llibre de geometria.
- [3] L. PYENSON, «Einstein's education: Mathematics and the laws of nature», *Isis*, vol. 71, núm. 3 (1980), p. 399-425.
- [4] A. PAIS, *Subtle is the Lord: The science and the life of Albert Einstein*, Oxford University Press, 1983. Edició revisada del 2005, amb un pròleg de Roger Penrose.
- [5] A. EINSTEIN, «Über ein die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffendes heuristisches Gesichtspunkt» («Sobre un punt de vista heurístic relatiu a la producció i transformació de la llum»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 17 (1905), p. 132-148. Aquest article, junt amb el publicat el 1906 a la mateixa revista («Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption» [«Sobre la teoria de la generació i absorció de la llum»], sèrie 4, vol. 20, p. 199-206), presenten l'equació fonamental de l'efecte fotoelèctric (resultat pel qual se li va atorgar el Premi Nobel l'any 1921).
- [6] A. EINSTEIN, «Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen» («Una nova determinació de les dimensions moleculars»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 19 (1906), p. 371-381.
- [7] A. EINSTEIN, «Über die von der molekulärkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen» («Sobre el moviment de les partícules en suspensió en líquids en repòs que exigeix la teoria cineticomolecular de la calor»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 17 (1905), p. 549-560.

- [8] A. EINSTEIN, «Zur Elektrodynamik bewegter Körper» («Sobre l'electrodinàmica dels cossos en moviment»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 17 (1905), p. 891-921.
- [9] A. EINSTEIN, «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?» («Depèn la inèrcia d'un cos de la seva energia?»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 18 (1905), p. 639-641.
- [10] A. EINSTEIN, «Zur Theorie der Brownschen Bewegung» («Sobre la teoria del moviment brownià»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 19 (1906), p. 371-381.
- [11] J. STACHEL (ed.), *Einstein's miraculous year: Five papers that changed the face of physics*, amb un pròleg de R. Penrose, Princeton University Press, 1998. Versió en castellà de J. García Sanz a *Einstein 1905: un año milagroso*, Crítica, 2001. L'ordre en què analitza els cinc treballs és com segueix: [6], [7], [8], [9] i [5].
- [12] E. SALLENT, A. ROCA i A. MOLINA (ed.), 1905: *El jove Einstein en català*, Institut d'Estudis Catalans, Societat Catalana de Física i Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, 2005. Presentació a càrrec de J. M. Pons Ràfols i A. Roca Rosell. Els textos introductoris són de L. Navarro i de X. Roqué.
- [13] H. A. LORENTZ, A. EINSTEIN, H. MINKOWSKI i H. WEYL, *The principle of relativity*, Methuen and Co., 1923. Republicat per Dover el 1952. És una col·lecció d'onze articles originals sobre les teories especial i general de la relativitat, amb notes a càrrec d'A. Sommerfeld.
- [14] A. EINSTEIN, «Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen» («Sobre el principi de relativitat i les conclusions que se'n deriven»), *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, vol. 4 (1907), p. 411-462.
- [15] J.-P. AUFRAY, *Einstein et Poincaré: Sur les traces de la relativité*, Le Pommier, 2005.
- [16] W. RINDLER, *Relativity: Special, general, and cosmological*, 2a ed., Oxford University Press, 2006.
- [17] S. XAMBÓ, *Álgebra lineal y geometría lineales*, vol. II, Editorial Universitaria de Barcelona (Eunibar), 1978.
- [18] H. MINKOWSKI, «Space and time». És una traducció a l'anglès, recollida a [13, p. 75-91], d'una conferència impartida a la vuitantena assemblea alemanya de científics i metges celebrada el 1908 a Colònia, Alemanya.
- [19] C. LAVOR, S. XAMBÓ i I. ZAPLANA, *A geometric algebra invitation to space-time physics, robotics and molecular geometry*, Springer, 2018.
- [20] S. XAMBÓ, *Real spinorial groups: A short mathematical introduction*, Springer, 2018.
- [21] A. EINSTEIN, «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie» («Els fonaments de la teoria general de la relativitat»), *Annalen der Physik*, sèrie 4, vol. 49 (1916). Una traducció a l'anglès és recollida al llibre [13, p. 111-173].
- [22] A. EINSTEIN, *The meaning of relativity*, 6a ed., Chapman and Hall Ltd, 1956.
- [23] A. REVENTÓS i C. RODRÍGUEZ, *Una lectura del 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' de C. F. Gauss*, Institut d'Estudis Catalans, Societat Catalana de Matemàtiques, 2006. Versió digital.²⁴ El darrer capítol, sobre trigonometria esfèrica i hiperbòlica, és una contribució de Joan Girbau.

24. <https://scm.iec.cat/wp-content/uploads/2018/01/MainGaussColor.pdf>.

- [24] A. EINSTEIN i M. GROSSMANN, «Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von A. Einstein. II. Mathematischer Teil von M. Grossmann» («Esbós d'una teoria generalitzada de la relativitat i una teoria de la gravetat. I. Part física, A. Einstein. II. Part matemàtica, M. Grossmann»), Leipzig, Teubner, 1913, 38 p. Reimpressió de *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 62 (1913), p. 225-261 (part física, p. 225-244).
- [25] S. XAMBÓ, *Geometria*, 2a ed., Edicions UPC, 2001, coll. «Politext», núm. 60. Versió digital.²⁵
- [26] Conferències FME (CFME): des del curs 2003-2004, la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) dedica cada curs a una personalitat històrica. Dels sis primers (dedicats a Henri Poincaré, Albert Einstein, Carl Friedrich Gauss, Leonhard Euler, Bernhard Riemann i Emmy Noether) se'n van publicar sengles volums. Accessibles a UPCommons.²⁶ «La Facultat de Matemàtiques i Estadística es sumà a la iniciativa dedicant a Einstein el curs 2004-2005. Es volgué així tenir ocasió de commemorar el científic i la seva vasta obra, la influència que els seus treballs han tingut al llarg dels anys i, sobretot, la pervivència fructífera de les seves idees no només en la física i la tecnologia, sinó també en les matemàtiques» (del «Prefaci» al *Curs Einstein (2004-2005)*). Per a més informacions, vegeu CFME.²⁷
- [27] J. GIRBAU, *Geometria diferencial i relativitat*, Institut d'Estudis Catalans, Societat Catalana de Matemàtiques (SCM), 2022, coll. «Publicacions de la SCM», vol. 8. Reproducció íntegra i textual de l'edició original de la Universitat Autònoma de Barcelona (1993). Edició a cura de P. Pascual. Accessible al web de la SCM.²⁸
- [28] A. EINSTEIN, «Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie» («Consideracions cosmològiques sobre la teoria general de la relativitat»), *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1917. A [13, p. 177-188] s'inclou una traducció a l'anglès.
- [29] K. THORNE, «My role in the development of LIGO and the detection of gravitational waves». Lliçó com a doctor *honoris causa* de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Reproduïda a *IMTech Newsletter*, 6 (2023), p. 23-25. Les bases teòriques les va establir en el text *Black holes & time warps: Einstein's outrageous legacy* (Commonwealth Fund Book Program, WW Norton & Co, 1994).
- [30] R. PENROSE, *Black holes, cosmology and space-time singularities*, Nobel Lecture, el 8 de desembre de 2020.²⁹ Vegeu també «Gravitational collapse and space-time singularities», *Physical Review Letters*, vol. 14, núm. 3 (1965), p. 57-59.
- [31] K. S. THORNE i R. D. BLANDFORD, *Relativity and cosmology*, Princeton University Press, 2021, coll. «Modern Classical Physics», vol. 5.
- [32] A. L. BESSE, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1987, col·l. «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», sèrie 3, vol. 10.

25. <https://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36176>.

26. <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/79737>.

27. <https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/FME/ConferenciesFME.html>.

28. <https://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000490/00000020.pdf>.

29. <https://www.nobelprize.org/uploads/2024/02/penrose-lecture.pdf>.

- [33] J.-P. LUMINET, J. WEEKS, A. RIAZUELO, R. LEHOUCQ i J.-Ph. UZAN, «Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background», *Nature*, 425 (9 octubre 2003), p. 593-595. Versió digital.³⁰
- [34] L. W. TU, *Differential geometry: Connection, curvature, and characteristic classes*, Springer, 2017, coll. «Graduate Texts in Mathematics», núm. 275.
- [35] J. PUIGBÒ, *Píndoles científiques*, Stelblau, vol. I, 2014; vol. II, 2017; vol. III, 2022; vol. IV, 2023.

30. <https://www.nature.com/articles/nature01944>.

***La relativitat a l'abast de tothom:* valor actual de les idees d'Einstein sobre la història, l'ensenyament i la comunicació de la física¹**

Xavier ROQUÉ

Institut d'Història de la Ciència i Departament de Filosofia
Universitat Autònoma de Barcelona

El 1917 Albert Einstein, que tenia trenta-vuit anys i no era encara un científic mundialment famós, publicà un llibre extraordinari, ple d'idees lluminoses sobre el temps, l'espai i l'Univers. *La relativitat a l'abast de tothom* era la primera exposició general i accessible de la relativitat (Einstein, 2018). Pocs mesos abans, tot just completada la teoria, havia explicat al seu amic Michele Besso que tenia la intenció d'escriure'l, «perquè si no ho faig no entendran [la teoria], tan senzilla com és en el fons» (carta d'Einstein a Michele Besso, 3 de gener de 1916, Schulmann *et al.*, 1996, p. 234). Einstein no ironitzava. La relativitat es basa en raonaments sensibles, lligats a la percepció del pes i el moviment. Podem percebre el moviment uniforme? Com experimenta el pes una persona que cau lliurement? Reflexionar sobre aquestes qüestions en aparença simples fou el primer pas per capgirar les idees prevalents sobre la llum i la gravetat.

A Einstein no li resultà fàcil escriure el llibre, però va fer-ho de seguida. A l'hora d'explicar per què s'ho va prendre tan seriosament hem de tenir en compte, primer, que Einstein va créixer en el si d'una cultura centreeuropea de parla alemanya que valorava la formació integral de l'individu (*Bildung*) i no fomentava la diferenciació entre ciència i humanitats. L'exposició de les seves idees a un públic educat era, per a ell, un deure intel·lectual i social, i no era el primer cop que ho feia. Gràcies a l'edició en curs dels treballs i la correspondència d'Einstein per Princeton University Press (disset volums que cobreixen els escrits, la correspondència i la documentació relativa a Albert Einstein des de 1879, accessibles en línia a *The collected papers of Albert Einstein*) comprovem que ja havia escrit sobre la

1. Text basat en Xavier ROQUÉ, «Cent anys de relativitat», a EINSTEIN (2018), p. 9-24. Les traduccions de les citacions que hi ha al llarg del text són pròpies.

relativitat en revistes científiques generalistes, en un diari i en l'enciclopèdia *Die Kultur der Gegenwart* («La cultura del present») (Einstein 1910, 1911, 1914a i 1915). I encara atendria moltes més peticions d'aquest tipus a partir de la seva consagració mediàtica el 1919 i la concessió del Premi Nobel de Física de 1921.

Aquests textos responien a una concepció àmplia de l'educació científica, expressada amb claredat en una conferència de 1936:

L'escola hauria de tenir sempre com a objectiu que el jove en surti amb una personalitat harmoniosa, i no com un especialista. Crec que, en un cert sentit, això és aplicable fins i tot a les escoles tècniques, els alumnes de les quals es dedicaran a una professió molt definida. El desenvolupament del pensament i el judici independents hauria d'ésser sempre l'objectiu principal, no pas l'adquisició de coneixements especialitzats. Si una persona domina els fonaments del seu àmbit d'estudi i ha après a pensar i treballar independentment, segur que trobarà el seu camí; a més, serà més capaç d'adaptar-se al progrés i els canvis que no pas la persona que s'ha limitat a adquirir coneixement detallat. (Einstein, 1936, p. 592)

En segon lloc, a les motivacions d'Einstein per difondre la relativitat hem d'afegir el seu estil de raonament, consistent a reexaminar les qüestions més complexes com si fos la primera vegada que ho fes, qüestionar sense excepcions els fonaments aparentment més sòlids i revisar de manera meticulosa els procediments de construcció dels conceptes de la física. Tot això li permetia unificar textos de caràcter molt diversos.

La relativitat a l'abast de tothom no és cap excepció. El llibre conté un relat personal i immediat sobre el procés de creació científica, en què les idees apareixen «en l'ordre i el context en què foren concebudes» (Einstein, 2018, p. 25). Einstein admirava els autors capaços de permetre al lector «experimentar el plaer de la recerca i del descobriment, el curs viu del pensament, comprendre amb claredat les circumstàncies que determinaren la tria d'un camí abans que cap altre» (Einstein, 1914b, p. 135), i en un text gairebé simultani amb la publicació del llibre insistiria a dur el lector «pel camí indirecte i aspre que jo mateix he recorregut, perquè és la meua única esperança que el resultat final pugui interessar-li» (Einstein, 1917, p. 144). La presentació de la relativitat, doncs, enllaça de manera fluïda amb la creació de la teoria, tant pel que fa a la seqüència temporal com a l'ordre conceptual del raonament. Les idees d'Einstein sorgeixen i s'expressen en forma d'intuïcions felices que afluïren tant en els seus treballs científics com en els seus textos de divulgació. *La relativitat a l'abast de tothom* convida el lector pacient a seguir l'autor en un camí de descobriment i emoció intel·lectual. La història, l'ensenyament i la comunicació no es distingeixen nítidament del procés de creació científica: en formen part i se sostenen mútuament.

Abans de discutir el valor actual d'aquesta aproximació, voldria il·lustrar-la amb dos exemples, un de cada part del llibre.

La primera part, dedicada a la relativitat especial, tracta sobre els efectes del moviment uniforme sobre les lleis de la física. Podem percebre el moviment? Al segle XVII Galileu argumentà que no és possible distingir entre el repòs i el moviment rectilini a velocitat constant. Però la recerca i l'exploració de la llum, l'electricitat i el magnetisme, en la segona meitat del segle XIX, qüestionaren aquest primer principi de relativitat. Potser la llum, que es propaga per l'espai a una velocitat enorme però finita, permetria finalment distingir entre el repòs i el moviment uniforme?

Alhora que els físics mesuraven amb més i més precisió aquesta velocitat fantàstica, una teranyina de cables telegràfics terrestres i submarins encerclava el planeta, més de 350.000 quilòmetres de cable fins a 1900, l'any que Einstein acabà els estudis de física i matemàtiques a Zúric. El telègraf aniquilà el temps i l'espai, i possibilità la sincronització horària mundial i la divisió del planeta en fusos horaris. L'establiment del temps universal i l'estudi de la llum plantejà nous reptes científics, tecnològics i epistemològics, que el jove Einstein conegué a través de novel·les com ara *La màquina del temps* (1895), de Herbert G. Wells, o *Die Gestirne und die Weltgeschichte. Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit* («Les estrelles i la història del món. Idees sobre l'espai, el temps i l'eternitat»), del jurista i astrònom amateur Felix Eberty (1812-1884), publicada de manera anònima el 1846 i reeditada el 1923 amb una introducció d'Einstein (Eberty, 1846). Eberty imagina un viatger capaç de moure's per l'espai a velocitats supralumíniques i encaçar i ultrapassar les imatges del passat:

Imaginem un observador dotat d'un poder de visió infinit que es mira la Terra de tan lluny que en aquest instant contempla els temps d'Abraham. Imaginem, també, que aquest observador fos capaç de viatjar en direcció a la Terra amb una velocitat tal que, en un temps breu, com ara una hora, s'hi apropés fins a una distància de 8 minuts llum. Si imaginem tot això, deixant de banda que sigui possible o real, és inevitable concloure que en una hora aquest observador veuria desfil·lar davant els seus ulls tota la història del món, des dels temps d'Abraham fins al moment actual, ja que, en iniciar el viatge, veia la Terra com era fa 4.000 anys, [...] passada mitja hora, com era fa 2.000 anys, passats tres quarts d'hora, com era fa 1.000 anys, i passada una hora, la contempla tal com és ara. (Eberty, 1846, p. 23)

La llum i el moviment constituïrien una moviola de la mida de l'Univers. Molt abans que l'abordés des de la física, doncs, la tecnologia i la literatura familiaritzen Einstein amb el problema de la llum, l'espai i el temps.

I també recorre a la filosofia. Tal com altres físics filòsofs de la seva generació, com ara Niels Bohr o Erwin Schrödinger, Einstein no distingeix entre física i filo-

sofia a l'hora d'analitzar la percepció del món físic o la naturalesa de la realitat. Amb els seus amics Conrad Habicht i Maurice Solovine crea un club de lectures filosòfiques, l'Akademie Olympia. La lectura de *The grammar of science* («La gramàtica de la ciència») de Karl Pearson els ensenya que «no podem afirmar l'existència real del temps, com tampoc la de l'espai; no són a les coses sinó al nostre mode de percebre-les» (Pearson, 1911, p. 211). D'Ernst Mach aprenen que «ningú no pot afirmar res sobre el temps i l'espai absoluts, perquè són mers objectes mentals, que no podem reconèixer en l'experiència» (Mach, 1897, p. 223). Aquests científics i filòsofs i d'altres, particularment David Hume, amb el *Tractat sobre la naturalesa humana*, el qual llegí «amb zel i admiració», centren l'atenció d'Einstein en la formació dels conceptes i la funció dels principis formals en ciència. Tal com ell mateix reconeix el 1915: «És molt probable que sense aquests estudis filosòfics mai no hagués trobat la solució» (carta d'Einstein a Moritz Schlick, 14 de desembre de 1915, Schulmann, 1996, p. xxiv). El camí vers la relativitat, doncs, és apte per a aquells que no dominen la física, perquè la teoria no brolla només de la física, sinó també de la filosofia, la literatura i la tecnologia.

A la segona part del llibre, Einstein resol el problema de la gravitació a partir d'una intuïció feliç, la millor idea de la seva vida: «per a un observador que cau lliurement, el camp gravitatori no existeix» (Schulmann, 1996, p. 265). Així, com que no podem distingir físicament entre repòs i moviment uniforme, no podem distingir entre la caiguda lliure i l'absència de gravetat, o entre gravetat i acceleració uniforme. A *La relativitat a l'abast de tothom*, Einstein exposa aquesta idea amb un experiment mental basat en la seva intuïció inicial:

Imagem un fragment a l'espai buit, lluny dels estels i de qualsevol altra massa de consideració [...]. Imagem-hi una caixa en forma d'habitació, on es troba un observador proveït d'aparells. És clar que, per a ell, la gravetat no existeix [...]. Suposem que al sostre exterior de la caixa s'ha fixat un ganxo amb una corda, i que un ésser indeterminat en tiba amb una força constant. Caixa i observador s'enliren conjuntament amb un moviment uniformement accelerat *cap amunt* i acaben assolint una velocitat fantàstica, si ens ho mirem des de fora. Com jutja l'esdeveniment la persona dins la caixa? El terra li transmet per reacció l'acceleració de la caixa, i per restar dret ha de resistir aquesta pressió amb les cames. L'observador, doncs, s'està dret a la caixa igual que una altra persona s'estaria dreta en una habitació a la Terra. Si deixa anar un objecte, l'acceleració de la caixa no s'hi transmetrà i caurà amb un moviment relatiu accelerat [...]. Basant-se en els seus coneixements del camp gravitatori, l'observador conclourà que tant ell com la caixa es troben immersos en un camp gravitatori constant en el temps. Primer se sorprendrà que la caixa no caigui, però quan descobreixi el ganxo i la corda tibant, conclourà lògicament que la caixa està suspesa en el camp gravitatori. (Einstein, 2018, p. 66-67)

Actualment, aquestes sensacions les experimenten de manera rutinària els tripulants de l'Estació Espacial Internacional i els científics que treballen amb microgravetat a bord d'avions adaptats, com ara l'Airbus A310 Zero G de Nove-space, amb seu a Bordeus, disponible també per al turisme gravitatori.

En tot cas, elaborar aquestes idees li costà a Einstein anys de treball i col·laboració amb altres científics, que culminaren a Berlín durant la Primera Guerra Mundial. El novembre de 1915 presentà a l'Acadèmia Prussiana de les Ciències una sèrie de tres articles que contenien les equacions de camp de la gravitació, i el març de 1916, l'article que completava la sèrie i que contenia els fonaments de la relativitat general. Pocs mesos després enviava a impremta *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich)* («La relativitat a l'abast de tothom»).

El salt a la fama no es produiria fins al novembre de 1919, quan s'anunciaren en roda de premsa a Londres els resultats de l'expedició astronòmica que havia fotografiat l'eclipsi total de Sol del maig d'aquell any. Einstein esdevingué un mite internacional. El fet que els astrònoms britànics donessin la raó a un savi alemany generà un enorme ressò mediàtic. En l'estela de la revolució bolxevic, la revolució relativista va fer d'Einstein una celebritat itinerant que solcava el planeta parlant de l'espai i temps i la curvatura de la llum a públics expectants, de Tòquio a Buenos Aires, passant per Barcelona fa cent anys (Roca-Rosell, 2023).

La mitificació d'Einstein donà ales al seu llibre sobre la relativitat. Entre 1917 i 1923 se'n van fer catorze edicions i fou traduït a nombrosos idiomes, incloent-hi el castellà el 1921. La traducció al català es va haver d'esperar fins a l'any 2000, editada per l'Institut d'Estudis Catalans (Einstein, 2000). Paradoxalment, un dels principals arguments promocionals fou la inintelligibilitat: «Un llibre per a dotze homes savis. Ningú més al món no pot comprendre'l, digué Einstein quan els seus agosarats editors decidiren publicar-lo» (*The New York Times*, 10 de novembre de 1919). Malauradament, aquest mite ha perdurat i ha contribuït a consolidar la imatge d'un savi despatat, indiferent a la societat. Avui, però, rellegim Einstein sabent que la seva intenció era ben bé una altra: posar unes idees meravelloses a l'abast de tothom.

Per concloure, voldria discutir de manera breu les lliçons que podem treure d'aquesta història. Quin valor tenen avui les idees d'Einstein sobre la història, l'ensenyament i la comunicació de la física?

La primera consideració final evident i important és que el constructe de les dues cultures no tan sols és obsolet —ja ho era els anys 1950, quan, en paraules de David Edgerton, sorgeix en forma d'antihistòria, per amagar el pes real dels tecnòcrates en el govern i la cultura britànics—, sinó que impedeix reconèixer de manera efectiva l'abast i la profunditat de les relacions mútues, constitutives, dels diferents camps del coneixement (Edgerton, 2005). Més que no pas educar els

altres en les subtileses del propi àmbit de coneixement, doncs, ens caldria atendre tot allò que podem aprendre d'altres àmbits. El cas d'Einstein mostra que, tot sovint, els elements humanístics i culturals formen part del coneixement científic des de la seva creació, i poden ajudar-nos molt a parlar-ne més enllà del cercle d'especialistes i d'iniciats. No reconèixer aquestes dimensions dificulta la comprensió de la ciència i en distorsiona el sentit. En particular, l'atenció a la gènesi i el desenvolupament de les idees ens ajudaria a situar millor la ciència davant els reptes actuals.

Això inclou la literatura del passat. Raymond Goldstein, físic de la Universitat de Cambridge, sosté que convé no deixar de mirar enrere, no deixar de llegir la literatura científica del passat (Goldstein, 2018). Un dels seus exemples, el primer de la llista de referència a la vella literatura de la seva pàgina web, és l'article de Robert Brown de 1827 sobre el que avui anomenem el *moviment brownià*.

El 2023 es va celebrar el bicentenari del naixement d'Alfred Russel Wallace, codescobridor de la teoria de l'evolució. El 1898, quan Albert Einstein començava els seus estudis de física, Wallace feu balanç del segle XIX, un segle meravellós, ple d'èxits i fracassos:

Alhora que reconeixem les grans oportunitats que la ciència presenta per millorar el benestar humà, hem de reconèixer que no hem sabut fer-ne un ús adequat [...]. Hem gestionat tan malament la nostra economia social que hem donat a uns pocs un luxe injuriós, mentre que milions de persones pateixen la manca persistent dels recursos bàsics per a una existència saludable. En lloc de dedicar les energies dels científics a remeiar mals, veiem que els governs de les nacions més avançades armen el poble fins a les dents i dediquen bona part de la seva riquesa i dels seus recursos científics a preparar la destrucció de la vida, la propietat i la felicitat. (Wallace, 1898, p. 378)

Les paraules de Wallace ressonen amb les dels autors d'un article recent aparegut a la revista *Nature*:

L'estabilitat i la resiliència del sistema Terra està inextricablement lligada al benestar humà; però infravalorem aquesta interdependència i conseqüentment els tractem per separat [...]. La nostra proposta integra les ciències socials i naturals. [...] Les transformacions necessàries per garantir el benestar humà han de ser sistèmiques [...] i han de fer front als motors econòmics, tecnològics, polítics... dels canvis al sistema Terra [...]. Això requereix un canvi global en la justícia, l'economia, la tecnologia i la cooperació, un canvi que posi tots aquests elements al servei d'un futur segur i just. (Rockström *et al.*, 2023, p. 109)

Malauradament, res no prepara els nostres estudiants per tenir aquestes converses interdisciplinàries. Universitats com ara Stanford (School of Humanities and Sciences) o Cornell (College of Arts and Sciences) inclouen facultats d'humanitats i ciències. Al nostre país encara es considera que aquesta unió és impossible. La creació recent del nou grau en ciència, tecnologia i humanitats (Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Autònoma de Madrid i Universitat Carlos III de Madrid) és un primer pas en aquesta direcció, un pas que s'adiu amb les consideracions que podem fer avui a partir de la relectura de *La relativitat a l'abast de tothom*.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- EBERTY, Felix (1846). *Die Gestirne und die Weltgeschichte: Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit*. Breslau: Schulz. [Reedició a cura de Gregorius Itelson, amb una introducció d'Albert Einstein. Berlín: Rogoff, 1923]
- EDGERTON, David (2005). «C. P. Snow as anti-historian of British science: Revisiting the technocratic moment, 1959-1964». *History of Science*, vol. 43, p. 187-208.
- EINSTEIN, Albert (1910). «Le principe de relativité et ses conséquences dans la physique moderne». *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, tom 29, p. 5-28.
- (1911). «Die Relativitätstheorie». *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, vol. 56, p. 1-14.
- (1914a). «Vom Relativitäts-Prinzip». *Vossische Zeitung* (26 abril), suplement, p. 34.
- (1914b). «H. A. Lorentz, das Relativitätsprinzip». *Die Naturwissenschaften*, vol. 2, p. 135.
- (1915). «Die Relativitätstheorie». A: HINNEBERG, P. (ed.). *Die Kultur der Gegenwart: Ihre Entwicklung und ihre Ziele* (Leipzig: Teubner). Vol. 1, part 3, sec. 3: «Physik», p. 703-713.
- (1917). «Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie». *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 142-152. [Traducció al català: «Consideracions cosmològiques sobre la teoria de la relativitat general», a Einstein, 2000, p. 141-152]
- (1936). «Some thoughts concerning education». *School and Society*, vol. 44, p. 589-592.
- (2000). *La teoria de la relativitat i altres textos*. Edició i traducció a cura de Xavier Roqué. Barcelona: Pòrtic; Institut d'Estudis Catalans; Vic: Eumo.
- (2018). *La relativitat a l'abast de tothom*. Edició i traducció a cura de Xavier Roqué. Santa Coloma de Queralt: Obrador Edèndum.
- GOLDSTEIN, Raymond E. (2018). «Coffee stains, cell receptors, and time crystals». *Physics Today*, vol. 71, núm. 9, p. 32-38.
- MACH, Ernst (1897). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: Historisch-kritisch dargestellt*. Leipzig: Brockhaus.
- PEARSON, Karl (1911). *The grammar of science*. Londres: A. & C. Black.
- ROCA-ROSELL, Antoni (2023). *Quan Albert Einstein passejà per la Rambla*. Barcelona: Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC.
- ROCKSTRÖM, Johan [et al.] (2023). «Safe and just Earth system boundaries». *Nature*, núm. 619, p. 102-111.

SCHULMANN, R. [et al.] (1996). *The collected papers of Albert Einstein*. Vol. 8, part A: *The Berlin Years: Correspondence 1914-1917*. Princeton: Princeton University Press.

WALLACE, Alfred R. (1898). *The wonderful century: Its successes and its failures*. Toronto: George N. Morang.

La influència d'Einstein en l'anàlisi estocàstica

Marta SANZ-SOLÉ

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Aquest article és una breu reflexió sobre l'impacte de les contribucions d'Albert Einstein a l'estudi del *moviment brownià*. En particular, volem il·lustrar la influència dels seus treballs en el progrés d'algunes àrees de les matemàtiques del segle xx i la repercussió en línies de recerca centrals del segle xxi. L'escrit es basa en una conferència impartida a la jornada *Einstein i l'actualitat de les seves contribucions*, que va tenir lloc a l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el dia 16 de gener de 2024, adreçada a un públic amb una formació científica diversa. Al llarg de l'exposició, seguirem un estil divulgatiu per tal que el contingut sigui assequible a lectors no necessàriament familiaritzats amb la temàtica que es presenta.

Entre els anys 1905 i 1908, Albert Einstein va publicar cinc articles sobre el moviment brownià. Una recopilació d'aquests, amb anotacions contextuais i històriques, es recull a [9]. El primer de la sèrie, publicat originàriament a [6], conté les idees fonamentals i, pel que fa al desenvolupament posterior del tema, és el més rellevant. Einstein passava per un moment d'enorme creativitat. En efecte, el mateix any 1905, es publiquen a la revista *Annalen der Physik* tres treballs més que estableixen les bases de les seves extraordinàries contribucions posteriors: l'explicació de l'efecte fotoelèctric mitjançant la teoria quàntica de la llum, la teoria matemàtica de la relativitat especial i la deducció de la famosa equació $e = mc^2$ a partir de la teoria de la relativitat.

En l'extensa producció científica d'Einstein, l'estudi del moviment brownià no fou un tema prioritari. Tot i així, l'impacte immediat dels cinc treballs va ser molt gran, en part, perquè les qualitats comunicatives d'aquest geni de la ciència actuaven com un altaveu de luxe per a qualsevol descobriment. La influència posterior s'explica per l'originalitat de les idees que s'hi exposen. Al llarg d'aquest escrit il·lustrarem alguns aspectes de la seva propagació. Ho farem seguint una via de

connexió entre la teoria dels processos estocàstics, la modelització aleatòria i la física estadística.

El cos de l'article el formen les quatre seccions que venen després d'aquesta introducció. A la primera, expliquem què és el *moviment brownià*. A la segona, introduïm models matemàtics que contenen ingredients d'atzar fent servir el moviment brownià o nocions relacionades: són les *equacions diferencials* i les *equacions en derivades parcials estocàstiques*. A la tercera secció, ens centrem en un exemple d'equació en derivades parcials estocàstica, l'anomenada *equació KPZ* (en referència als autors que la van proposar: Mehran Kardar, Giorgio Parisi i Yi-Cheng Zhang), i expliquem el fenomen físic que l'ha motivada. Finalment, a l'última secció, discutim una propietat d'universalitat i un fenomen crític associat a l'equació. Ambdós conceptes —*universalitat* i *valor crític*— formen part del full de ruta de l'estudi de diversos fenòmens físics a partir de la física estadística.

1. EL MOVIMENT BROWNIÀ: EL MODEL D'EINSTEIN

El terme *moviment brownià* denota el moviment erràtic de partícules en suspensió en un líquid. El nom fa referència al botànic escocès Robert Brown (1773-1858), el qual, motivat per la comprensió dels processos de reproducció de les plantes, va descriure meticulosament les observacions (i les condicions en què les feia) del moviment de partícules de pol·len d'espècies diverses i, fins i tot, de matèries inorgàniques, en suspensió en líquids (vegeu [1]). En tots els casos, Brown va constatar que les trajectòries seguien un patró similar i eren irregulars, tal com s'illustra en la figura 1.

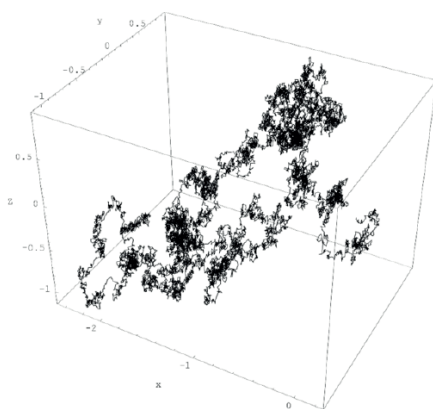


FIGURA 1. Trajectòria d'una partícula browniana.

FONT: [15].

El treball de Brown és essencialment descriptiu, amb poques conjectures i explicacions sobre el caràcter aleatori de les trajectòries observades. Més endavant, al llarg del segle XIX, diversos científics, principalment dels camps de la física i la química, van formular hipòtesis i en van fer algunes validacions experimentals, per exemple: H. V. Regnault (1858), Chr. Weiner (1863), G. Cantoni i E. Oehl (1865), S. Exner (1867), J. Delsaux (1877) i M. Gouy (1888).

Un dels grans descobriments científics de tots els temps ha estat l'estructura atòmica de la matèria. A començaments del segle XX, aquest era un tema candent que no podia passar de llarg per a la ment curiosa d'Einstein. A la seva autobiografia [7] explica que, amb l'objectiu de trobar evidències sobre l'existència d'àtoms de dimensió finita i determinada, va anar a parar al moviment brownià sense, segons afirma, estar al corrent del treball de Brown; podem deduir que tampoc no ho estava dels treballs posteriors que Brown va inspirar. En la ment creativa d'Einstein, el desconeixement dels antecedents no va tenir cap conseqüència negativa. En efecte, Einstein va ser pioner a aportar un model matemàtic per al moviment brownià deduït a partir de la teoria cineticomolecular de la termodinàmica, segons la qual les trajectòries de les molècules (partícules) responen als xocs entre elles i a les seves interaccions amb les molècules del medi. El model sorgeix de les hipòtesis següents:

1. Els moviments de les diferents partícules són independents.
2. Els desplaçaments d'una partícula en diferents intervals de temps són també independents.
3. La variació de la posició és aleatòria, depèn de la partícula, i pot ser positiva o negativa.
4. La proporció de partícules que, en un interval de temps petit, experimenten una petita variació (dx) pel que fa a la posició (n_{dx}) és $(n_{dx})/n = f(x) dx$, on n és el nombre total de partícules i f és una densitat de probabilitat simètrica.

Aquestes condicions introdueixen l'atzar en el fenomen d'evolució del moviment de les partícules i, per tant, es poden formalitzar utilitzant la teoria de la probabilitat. Així, la paraula *independència* en les hipòtesis 1 i 2 s'interpreta avui mitjançant la noció *independència probabilista*. En la hipòtesi 4 s'identifica la freqüència relativa d'un esdeveniment amb la seva probabilitat. La llei dels grans nombres de les probabilitats és un resultat bàsic de regularitat estadística que permet justificar l'aproximació de les dues quantitats, $(n_{dx})/n$ i $f(x) dx$, i, també, fer una estimació de l'error comès en l'aproximació. Per tant, la condició 4 pot entendre's com un abús o una simplificació de l'aproximació.

Denotem amb $u(t, x)$ el nombre de partícules per unitat de volum (densitat) en x a l'instant t . A partir de les hipòtesis anteriors, Einstein demostra que les variacions en temps i en espai de $u(t, x)$ estan relacionades per l'equació de difusió de la calor:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

on D és el coeficient de difusió, una constant específica del solvent (vegeu, per exemple, [9, p. 14-15]). Fixant el valor $x = 0$ quan $t = 0$, i la condició $\int u(t, x) dx = n$, resulta que

$$u(t, x) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (1)$$

és (llevat d'una constant multiplicativa) la *densitat de probabilitat normal* (o gaussiana) $N(0, \sqrt{2Dt})$. Notem també que, de (1), se'n dedueix que el desplaçament de la partícula en t és de l'ordre de $\sqrt{t}$ i que aquesta fórmula exhibeix el fenomen de difusió (quan $t \rightarrow \infty$, $u(t, x) \rightarrow 0$).

Una conseqüència molt important del model d'Einstein del moviment brownià, i el resultat que tanca l'article [6], és la determinació del *nombre d'Avogadro*. D'aquesta manera, Einstein va contribuir a donar credibilitat a la teoria atòmica de la matèria, que fou, recordem-ho, el que el va motivar a estudiar el moviment brownià.

Observem que el model d'Einstein del moviment brownià dona, en cada instant t , la distribució estadística de partícules a l'espai, en contraposició a una descripció de les trajectòries de les partícules, com havia fet Brown amb les seves observacions. Es podria pensar que Einstein es va inspirar en la física estadística per introduir l'atzar en el seu model del moviment brownià. Sorpren, però, una vegada més, l'afirmació que apareix a la seva autobiografia [7] sobre el desconeixement dels treballs de Josiah Willard Gibbs i Ludwig Boltzmann en aquest camp.

2. MOVIMENT BROWNIÀ I MODELITZACIÓ ALEATÒRIA

Quan Einstein publicà la teoria del moviment brownià, el pensament indeterminista començava a fer-se un lloc en el coneixement científic. A les matemàtiques, aquest canvi de paradigma coincidí amb l'etapa inicial de la creació de la teoria dels *processos aleatoris o estocàstics*, motivada, en gran part, per la modelització de dinàmiques amb un grau considerable d'incertesa. Per exemple, els *processos de Markov* van estar associats des del començament a la descripció d'evolucions de poblacions, en què la incertesa prové del coneixement insuficient dels múltiples factors que les afecten, i el moviment brownià fou utilitzat per Louis Bachelier per a calcular les fluctuacions del preu de les accions a la Borsa de París.

Recordem que, en un marc elemental, un procés estocàstic es defineix com una funció

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}^n,$$

on t representa el temps i ω el paràmetre de l'atzar que pertany a l'espai mostral Ω . La família $(X(t, \omega))$ descriu l'evolució al llarg del temps associada a una mostra aleatòria del fenomen que estudiem (obtinguda en fixar ω). Es pot substituir $\mathbb{R}_+$ per $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ si es consideren evolucions en instants discrets, per exemple, $t = 0, 1, \dots$. En fixar ω , la funció $t \mapsto X(t, \omega)$ és la trajectòria del procés corresponent a l'observació ω i, en variar $\omega \in \Omega$, obtenim el conjunt de les trajectòries del procés.

Sovint no s'escriu la variable ω (se sobreentén que hi és) i es fan servir indistintament les notacions $X(t)$ o X_t .

Fixant propietats probabilistes de la família $(X(t, \omega))$ s'obtenen classes o tipus concrets de processos estocàstics. Per exemple, els processos de Markov són aquells pels quals, fixat un temps t_0 , l'evolució del procés en el futur, $(X(t, \omega), t \in [t_0, \infty))$, i en el passat, $(X(t, \omega), t \in [0, t_0])$, són *condicionalment independents* donat $X(t_0, \omega)$ (el present).

Tornant al context trajectorial de les partícules brownianes, es defineix el *procés (estocàstic) del moviment brownià* en $\mathbb{R}$ com la família $(B(t, \omega), (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega)$ que compleix les condicions següents:

- 1) *Trajectòries contínues*. Per a tot ω -q. s. (fora d'un esdeveniment de probabilitat zero), les trajectòries $t \mapsto B(t, \omega)$ són contínues.
- 2) *Increments independents*. Per a qualsevol $0 \leq t_1 \leq t_2, \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$, les variables aleatòries $B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ són independents.
- 3) Per a tot $t \in \mathbb{R}_+$, la variable aleatòria $B(t)$ té llei $N(0, t)$.

Aquesta definició és, evidentment, coherent amb el model d'Einstein.

Al llarg de més d'un segle, l'atzar s'ha consolidat com una noció indispensable per a entendre els fenòmens que ocorren al nostre entorn i, en general, al món. Aquesta tendència ha impulsat que en les ciències matemàtiques es creessin models descrits mitjançant processos estocàstics, i s'ha instaurat el raonament estadístic com a base de prediccions i de l'aprenentatge automàtic.

Les equacions diferencials i en derivades parcials expliquen en llenguatge matemàtic fenòmens familiars, com ara el moviment dels cossos, la difusió de la calor, la propagació de la llum, les turbulències meteorològiques, el creixement de poblacions, etc. Són models deterministes. El fonament matemàtic d'aquestes equacions és el càlcul diferencial i integral d'Isaac Newton i Gottfried W. Leibniz. Aquests models aporten una bona descripció macroscòpica dels fenòmens. Tanmateix, no tenen en compte les interaccions caòtiques de les partícules físiques a

escala microscòpica, ni les incerteses en el medi en què es produeixen els fenòmens. Així, per exemple, l'equació clàssica d'ones pot ser un bon model per a descriure les variacions de la superfície d'un mar en calma o un llac tranquil, però és menys creïble que serveixi de bon model del mateix fenomen en casos de meteorologia extrema.

La confirmació de la teoria atòmica de la matèria i el desenvolupament de la mecànica quàntica i la física estadística van fer palesa la necessitat d'incorporar el coneixement del que ocorre en els fenòmens a escala microscòpica. Les equacions diferencials i en derivades parcials estocàstiques són instruments que van néixer, en part, amb aquesta finalitat i han esdevingut un pilar fonamental de la modelització matemàtica. En funció del context, aquestes equacions es poden interpretar com a extensions de les equacions diferencials i en derivades parcials ordinàries a les quals s'afegeixen termes descrits per processos estocàstics, o bé es consideren coeficients que depenen de l'atzar, condicions inicials aleatòries, etc. En molts casos, també es poden interpretar com a transformacions més o menys complexes del moviment brownià.

Considerem dos exemples típics, un d'equació diferencial estocàstica i un altre d'equació en derivades parcials estocàstica:

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t + \sigma(S_t)\xi_t, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(u(t, x)) + g(u(t, x))\xi(t, x), \quad (3)$$

$$(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

En la primera equació cal fixar el valor inicial (per a $t = 0$) S_0 i, en el segon, el de $u(0, x)$, que poden ser deterministes o aleatoris. Els coeficients σ , f i g poden ser funcions reals o definides en $\mathbb{R} \times \Omega$, és a dir, aleatòries. Aclarim que la notació $t \mapsto \xi_t$ es refereix a la derivada (en el sentit de les distribucions) de la trajectòria del moviment brownià, que s'anomena un *soroll blanc*. Formalment, $\frac{dB(t)}{dt} = \xi_t$. La notació $(t, x) \mapsto \xi(t, x)$ descriu una generalització del soroll blanc quan, a banda del paràmetre temporal, hi ha també un paràmetre espacial. S'anomena *soroll blanc en espai i temps* i és la derivada (en el sentit de les distribucions) d'una funció que representa una superfície aleatòria tal que les seccions obtingudes fixant t (respectivament, x) són trajectòries de moviments brownians. Formalment, $\frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial t \partial x} = \xi(t, x)$, per a un determinat procés gaussià $(W(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, que s'anomena *man-ta browniana* (figura 2).

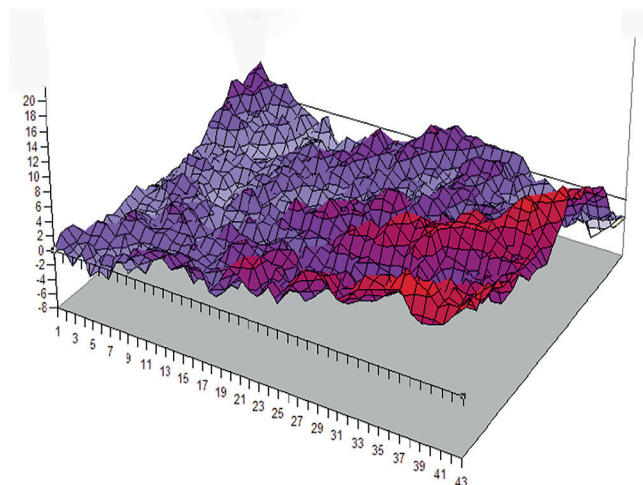


FIGURA 2. Simulació de la manta browniana.

FONT: [19].

Si en l'equació (2), $\sigma \equiv 0$, obtenim una equació diferencial ordinària lineal que modelitza fenòmens amb creixement exponencial. Si en l'equació (3), $g \equiv 0$, obtenim una equació (clàssica) de la calor no homogènia. D'altra banda, si $\mu = 0$ i $\sigma \equiv 1$, l'equació (2) diu $S_t = B(t)$. En aquest sentit, (2) defineix un procés estocàstic més general que el moviment brownià. Una consideració anàloga s'aplica a l'equació (3), considerant $f \equiv 0$, $g \equiv 1$, i substituint el moviment brownià pel procés $(W(t, x))$.

Quin paper tenen els termes $\sigma(S_t)\xi_t$ i $g(u(t, x))\xi(t, x)$ de les equacions (2) i (3), respectivament? A les dues equacions, s'ha afegit un terme que representa una força aleatòria que modifica qualitativament el model determinista. Com que l'efecte de l'equació és el de barrejar tots els ingredients segons una dinàmica específica, el resultat, és a dir, la solució de cadascuna de les equacions, serà un procés estocàstic i no pas una funció determinista.

Per a donar sentit a les equacions estocàstiques, com ara (2) i (3), ha calgut crear un nou càlcul en substitució del de Newton i Leibniz: és el càlcul estocàstic d'Itô (de la dècada de 1950) i generalitzacions posteriors d'aquest. Acabem aquesta secció amb una breu explicació sobre la necessitat d'aquest nou càlcul.

Les trajectòries del moviment brownià, és a dir, el recorregut de partícules en suspensió en un fluid, són molt irregulars. Per simplificar, ens centrarem en una única coordenada de la trajectòria, malgrat que típicament és tridimensional. Si bé els camins són funcions contínues (del temps), s'ha demostrat que no són de-

rivables en cap punt. Això significa que, en cada instant, hi ha un canvi de direcció en la trajectòria. No podem representar gràficament una corba com aquesta, però li podem donar un sentit matemàtic, per exemple, mitjançant un procés d'aproximació. Com en el cas determinista, la formulació rigorosa de les equacions (2) i (3) fa servir integrals, la qual cosa implica tenir una teoria per a donar sentit a termes com ara

$$\int_0^t \sigma(S_s) dB(s) := \int_0^t \sigma(S_s) \xi_s ds,$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(u(s, x)) dW(s, y) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(u(s, x)) \xi(s, x) ds dx.$$

El càlcul clàssic no admet integradors tan irregulars com les funcions $(B(t))$ i $(W(t, x))$; és per això que ha calgut inventar-ne d'altres. El lector interessat pot consultar [12] per a una introducció al càlcul estocàstic respecte del moviment brownià. En el cas infinit dimensional (càlcul estocàstic respecte a la manta browniana) es pot consultar, per exemple, [13], [4] o [5].

3. L'EQUACIÓ DE KARDAR-PARISI-ZHANG (KPZ)

A la dècada de 1980, en l'àmbit de la teoria quàntica de camps, es van introduir models d'equacions en derivades parcials estocàstiques per a descriure dinàmiques de sistemes de partícules a escala microscòpica. Per exemple, per a camps euclidians, en la construcció de mesures de probabilitat a partir de dinàmiques de Langevin (G. Parisi i Y.-S. Wu, G. Jona-Lasinio i K. P. Mitter), les equacions Φ_2^4 i Φ_3^4 en la quantificació estocàstica i, la que tractarem amb més detall en aquesta secció i en la següent, l'equació de Kardar-Parisi-Zhang, o *equació KPZ*.

La teoria matemàtica de les equacions en derivades parcials estocàstiques es va començar a desenvolupar en paral·lel als models de la física que acabem de mencionar; en part, a remolc d'aquests, però també com a continuació de l'estudi de les equacions diferencials estocàstiques iniciat per Itô, és a dir, amb motivació i objectius exclusivament matemàtics. Les darreres dècades ha esdevingut un camp d'activitat molt intensa. Una de les branques de recerca que genera molta activitat és la que té com a objectiu analitzar *fenòmens crítics* i de propietats d'*universalitat* en relació amb aquestes equacions.

En física, el terme *fenomen crític* es refereix a un comportament associat a valors de paràmetres, anomenats *valors crítics*, que marquen el llindar en canvis sobtats (les *transicions de fase*) de les propietats qualitatives d'un sistema. Un cas familiar de fenomen crític sorgeix en considerar l'efecte de la temperatura en l'estat físic de compostos químics. Sabem que l'aigua passa de l'estat sòlid al líquid a la temperatura de 0 °C, i de líquid a gas a 100 °C. Un altre exemple és la propie-

tat magnètica dels metalls. En escalfar una barra de ferro magnetitzada, aquesta propietat es va perdent gradualment i desapareix a una temperatura aproximada de 770 °C.

Un altre concepte important de la física és la *universalitat*. La seva formulació no és gaire precisa, més aviat expressa un comportament qualitatiu. Es diu que un objecte, per exemple, una equació que descriu un fenomen, és universal (o té la propietat d'universalitat) si s'obté (en general, per aproximacions) a partir d'altres objectes diferents però amb els quals comparteixen certes propietats estadístiques. S'anomenen *classes d'universalitat*. Més concretament, una equació en derivades parcials estocàstica que sorgeix com a model físic és un *objecte universal* si existeixen aproximacions de diferents tipus, mitjançant objectes matemàtics més regulars que la mateixa equació, que convergeixen cap a un objecte comú que, per definició, és la solució de l'equació en derivades parcials estocàstica. Aquesta idea té una certa fragilitat, ja que, en molts casos, no hi ha una prova rigorosa de l'existència de solució de l'equació en derivades parcials estocàstica. La universalitat vol expressar, també, una altra propietat: l'equació en derivades parcials estocàstica *universal* descriu una mateixa fluctuació a escala macroscòpica d'una varietat de models físics que, a escala microscòpica, presenten interaccions diferents. La fluctuació és una propietat estadística del sistema.

L'antecedent més senzill d'objecte universal és la llei de probabilitat *normal* o gaussiana. En efecte, pel teorema del límit central, la successió de les sumes parcials de successions de variables aleatòries independents, amb la mateixa distribució i amb variància finita i no nul·la, convenientment normalitzada, convergeix (en llei) cap a una *distribució normal*. Les classes d'universalitat són el conjunt de successions amb les propietats que hem descrit abans, que, malgrat tenir distribucions de probabilitat diverses, convergeixen cap al mateix límit.

Al catàleg d'equacions en derivades parcials estocàstiques, n'hi ha que descriuen fenòmens crítics, i es conjectura (o hi ha prou evidències empíriques) que tenen un caràcter universal. Un exemple paradigmàtic és l'equació de Kardar-Parisi-Zhang:

$$\partial_t u(t, x) = \nu \partial_x^2 u(t, x) + \lambda (\partial_x u(t, x))^2 + \xi(t, x), \quad (4)$$

on $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$. Fou introduïda en [11] per a descriure les fluctuacions al voltant d'un perfil determinista d'una interfície que creix de manera aleatòria a partir d'un perfil inicial $u(0, x)$ (determinista). Per exemple, el front d'un incendi, la frontera d'una colònia de bacteris o el contorn en la deposició de materials (sediments geològics, flocs de neu, etc.).

En l'expressió (4), $u(t, x)$ és la funció que dona la posició a l'instant t corresponent a la coordenada x del perfil; $\partial_t u(t, x)$ expressa la variació temporal instan-

tània de $u(t, x)$; $\partial_x^2 u(t, x)$ (que és la variació espacial instantània d'ordre dos) té un efecte de regularització, i $(\partial_x u(t, x))^2$ modelitza el creixement lateral i les seves correlacions. El terme $\xi(t, x)$ representa l'aleatorietat que es produeix a escala microscòpica en forma d'un soroll blanc en espai i temps.

Si $\lambda = 0$, (4) és una equació de la calor estocàstica amb una força externa aleatòria en forma d'un soroll blanc. La presència del terme quadràtic la converteix en una equació en derivades parcials estocàstica no lineal, i això afegeix complexitat al model. Des de la perspectiva matemàtica, l'anàlisi d'aquests tipus d'equacions presenta molts reptes. Per exemple, qüestions tan fonamentals com l'existència i la unicitat de solucions són en molts casos un problema obert. Per a l'equació (4), l'existència i la unicitat de solucions van ser demostrades el 2013 per Martin Hairer (vegeu [10]), que, per aquest resultat, fou guardonat amb una Medalla Fields l'any 2014.

4. UNIVERSALITAT DE L'EQUACIÓ KPZ

Seguint el paradigma del teorema del límit central sobre la llei de probabilitat normal, per a demostrar una propietat d'universalitat de l'equació KPZ, caldria determinar una classe de fenòmens descrits o simulats matemàticament que compartissin determinades propietats i que, en algun sentit, convergissin cap a l'equació KPZ. Malgrat la gran quantitat de recerca que gira al voltant d'aquesta qüestió, a hores d'ara és un problema obert. Tanmateix, es tracta d'una conjectura esperançadora, ja que hi ha força exemples que n'aporten evidències. En aquesta secció, descrivim dos d'aquests exemples.

— *Polímers en suspensió en líquids*

Recordem que, en l'estudi del moviment brownià, s'analitza l'evolució temporal del moviment de partícules en suspensió en líquids. Suposem que, en comptes de partícules, es considera una banda flexible amb n boles (la idealització d'una cadena d'un polímer amb n nodes). Els nodes estan sotmesos a forces com a conseqüència de les interaccions amb les molècules del líquid, i això provoca un moviment de tota la banda. Es vol descriure l'evolució temporal de cada punt de la banda quan el nombre de nodes tendeix a infinit. Per fixar el model, considerem primer l'evolució temporal de cada node del polímer. Se suposa que hi ha interaccions amb els propers, i, per a incorporar la incertesa, s'afegeix un component aleatori en cada node. El pas següent consisteix a fer un canvi d'escala pel que fa al temps i a l'espai. Anomenarem aquest procés *scaling*; té per objectiu, entre d'altres, visualitzar d'una manera més clara els canvis en un interval petit de temps, però mantenint certes propietats estadístiques. Si formalitzem la

dinàmica del fenomen amb equacions i fem tendir n a infinit, es troben els resultats següents:

1. Si les interaccions aleatòries es descriuen mitjançant un moviment brownià independent en cada node (una manera de modelitzar que el moviment té lloc en un líquid estacionari), s'obté l'equació en derivades parcials estocàstica

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + \xi(t, x),$$

és a dir, una equació de la calor estocàstica amb una força externa aleatòria descrita per un soroll blanc en espai i temps.

2. Si, en canvi, el component aleatori, a diferència del moviment brownià, és *anisòtrop* (és a dir, es comporta de manera diferent depenent de les direccions espacials), en determinades condicions, s'obté l'equació KPZ:

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + (\partial_x u(t, x))^2 + \xi(t, x),$$

on, per simplificar, hem omès les constants.

El primer resultat està demostrat a [8]. El segon resultat es proposa en l'article [11] com a deducció heurística de l'equació KPZ.

— Models de deposició aleatòria

L'evolució temporal de deposicions aleatòries o, en paraules planeres, la construcció aleatòria de torres mitjançant maons, està relacionada, almenys de manera experimental, amb l'equació KPZ.

Imaginem (o bé observem) com es van acumulant els flocs de neu a l'ampit d'una finestra. El perfil de la superfície va creixent aleatòriament i, si ens concentrem en una secció de la superfície, veurem que presenta (ampliant l'escala) una forma com la de la part inferior de la figura 3. Una imatge no gaire diferent s'obté en el procés de deposició de materials sobre el sòl, ja sigui per processos geològics naturals o catastròfics, per mètodes artificials o per simulacions. Aquests fenòmens han inspirat *models teòrics de deposició*. L'experiència aleatòria consisteix a llançar des d'un determinat nivell (que anomenem *sostre*) objectes d'un cert tipus seguint regles que combinen atzar i determinisme. Vegem-ne uns quants exemples.

• Model de deposició aleatòria simple

És el més senzill dels que es poden considerar. Obeeix al mecanisme següent. Es llancen des del sostre cubs unitaris que es van acumulant en columnes determinades per dos valors enters, x i $x + 1$, consecutius. El llançament es produeix

en instants aleatoris, de manera que el temps entre dos llançaments consecutius són variables aleatòries X independents amb distribució exponencial amb paràmetre $\lambda > 0$, és a dir, $P(X \geq z) = e^{-\lambda z}$. Denotem amb $u(t, x)$ l'alçada a l'instant t de la columna de blocs que ocupen l'espai identificat amb l'enter x , i posem $h(0, x) \equiv 0$. Definim $Y_{x,i}$ com les variables aleatòries (independents per a cada i) que indiquen el temps en què es produeix la caiguda del bloc i -èssim a la columna x . Com que la condició $u(t, x) < n$ és equivalent a $\sum_{i=1}^n Y_{x,i} > t$ i la distribució de probabilitat de $\sum_{i=1}^n Y_{x,i}$ és coneguda, es pot demostrar (eliminant constants irrelevantes) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t, x)}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t, x) - t}{\sqrt{t}} = N(x),$$

per a tot x , on $(N(x), x \in \mathbb{Z})$ és una família de variables aleatòries normals. La primera de les convergències és quasi segura, mentre que la segona és en llei. Aquest resultat diu que el model de deposició aleatòria compleix una llei dels grans nombres i un teorema del límit central. En particular, pertany al *model d'universalitat gaussià*, caracteritzat per un creixement de les fluctuacions temporals d'ordre $t^{\frac{1}{2}}$ (i una correlació transversal d'ordre t).

• Model de deposició aleatòria amb relaxació

Considerem la mateixa experiència de llançament que en el cas anterior, però suposem que la deposició es produeix pel mecanisme següent: el bloc que hauria d'acumular-se a la columna determinada per x ho fa ja sigui en aquesta columna, ja sigui en una de les dues adjacents, i es tria la que el situa més avall (vegeu la part superior de la figura 3). En aquest cas, les fluctuacions temporals són d'ordre $t^{\frac{1}{4}}$, i la correlació transversal, d'ordre $t^{\frac{1}{2}}$ (vegeu [14]).

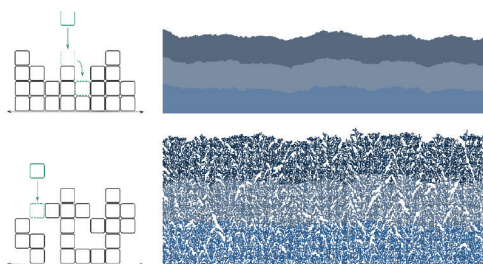


FIGURA 3. Deposicions amb relaxació i balística.

FONT: [16].

• Model de deposició balística

El marc és el mateix que el de la deposició aleatòria simple. La diferència rau en el lloc on se situa (s'enganxa) el bloc que es llança: es tria la primera posició on es pot enganxar al costat d'un bloc ja existent (vegeu la part inferior de la figura 3). Aquest procediment produeix cornises i espais buits. Denotem amb $u(t, x)$ l'alçada màxima a l'instant t per damunt de la posició x que està ocupada per un bloc.

En la simulació dels dos models —simple i balístic— hi trobem diferències notables. Les fluctuacions del perfil és més gran en el primer cas que en el segon. D'altra banda, en el model balístic es presenten correlacions transversals. Fins ara, en aquest cas, no s'han pogut demostrar resultats similars als que hem descrit per al model de deposició aleatòria simple. Falten eines i mètodes. Ara bé, l'anàlisi de models més senzills relacionats amb la deposició balística donen credibilitat a la conjectura que l'ordre de les fluctuacions és $t^{\frac{1}{3}}$, i el de les correlacions transversals, $t^{\frac{2}{3}}$. Els valors $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ dels paràmetres estan relacionats amb el canvi d'escala convenient (pel que fa a espai, a temps i a fluctuacions) per a determinar una família d'aproximacions de l'equació KPZ. No abordem aquesta interessant (i crucial) qüestió en aquest article.

• El joc TETRIS®

Un exemple sofisticat i més general de model de deposició aleatori és el famós videojoc TETRIS®. Una diferència important respecte dels models anteriors és el tipus d'objectes utilitzats per a «construir l'edifici». Hi ha diferents versions. Aquí considerem la versió en què, a partir de quadrats unitaris, es construeixen set conglomerats, anomenats *tetròminos*, com els que veiem a les figures 4 i 5.

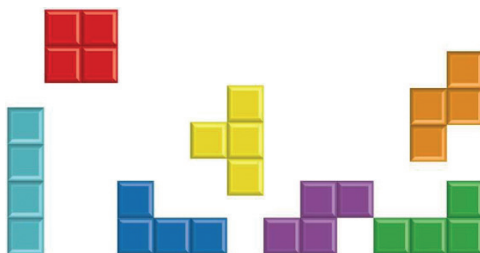


FIGURA 4. Tetròminos.

FONT: [17].

En instants aleatoris, per exemple, amb temps entre caigudes independents i exponencials, un tetròmino elegit i orientat a l'atzar es deposita en una posició aleatòria horitzontal i s'enganxa al punt més inferior, de manera que no s'encavalli amb cap altre tetròmino de la disposició existent. Com és el creixement de la interfície de la configuració?

Suposem que les posicions x pertanyen a un interval $[0, L]$ i, com en els casos anteriors, denotem $u(t, x)$ l'alçada del perfil al temps t de la posició x de la base. Simulacions numèriques porten a la conjectura següent: sigui $\sigma(t)$ la variància de $u(t, x)$ respecte d'un valor mitjà que se suposa constant, aleshores,

$$\sigma(t) \approx \begin{cases} t^{1/3}, & t < L^{3/2}, \\ L^{1/2}, & t \geq L^{3/2}, \end{cases}$$

on el símbol $\approx$ significa una igualtat, mòdul una constant multiplicativa.

Observem aquí diversos fets. En primer lloc, les fluctuacions, per a valors petits de t , són del mateix ordre que en el model de deposició balística, és a dir, $t^{1/3}$. En segon lloc, el pas a fluctuació constant per a valors grans de t . Això és degut a l'existència de correlacions: es conjectura que, en espai, aquestes creixen com $t^{\frac{2}{3}}$, com en el model balístic. Això implica que, per a $t = L^{3/2}$, les correlacions en espai són de l'ordre $t^{2/3} = (L^{3/2})^{2/3} = L$. Finalment, s'exhibeix una transició de fase en el temps $t = L^{3/2}$.

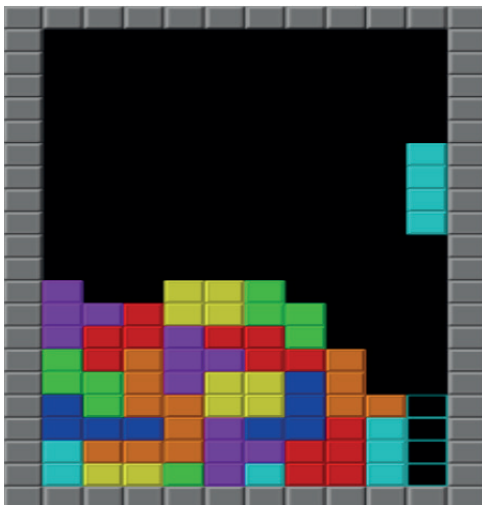


FIGURA 5. Captura parcial d'una pantalla de TETRIS®.

FONT: [18].

5. EPÍLEG

Moltes vegades, l'estudi dels fenòmens físics ha actuat com a catalitzador de la recerca matemàtica. En aquest article es presenta un cas d'aquest procés que va iniciar-se ara fa gairebé cent anys. L'interès d'Albert Einstein pel moviment brownià, les seves aportacions originals i la seva credibilitat com a científic excepcional van fer créixer les connexions que hi havia a començaments dels segle xx entre la probabilitat i la física. Avui, el vincle està plenament consolidat.

En aquest article, ens hem centrat en l'impacte que ha tingut el moviment brownià en el progrés de la modelització aleatòria i la seva utilització. Una part dels avenços en aquesta línia han aportat una justificació rigorosa per a models físics descrits mitjançant equacions en derivades parcials estocàstiques i solucions, o un més bon coneixement de les conjectures sobre la relació entre caos i fluctuacions en els sistemes físics a escala microscòpica. Un dels punts culminants ha estat la creació de la *teoria de les estructures regulars* de Hairer. La recerca en equacions en derivades parcials estocàstiques genera un cos teòric ric i complex que expandeix la teoria de la probabilitat, crea sinergies entre diversos camps de les matemàtiques (probabilitats, combinatòria, anàlisi complexa, anàlisi de Fourier, teoria de la representació, geometria diferencial, mètodes numèrics, etc.) i, quelcom igualment important, sinergies entre disciplines (física, biologia, medicina, climatologia, sociologia, etc.) a través de la utilització dels sistemes complexos. És difícil imaginar un viatge d'aquesta envergadura sense l'impuls inicial d'Einstein.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- [1] BROWN, R. (1828). «A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies». *Philosophical Magazine*, 4, p. 161-173.
- [2] CORWIN, I. (2016). «Kardar-Parisi-Zhang Universality». *Notices of the AMS* (Providence: American Mathematical Society), 3, p. 230-240.
- [3] CORWIN, I.; SHEN, H. (2020). «Some recent progress in singular stochastic partial differential equations». *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society*, 57, p. 409-454.
- [4] DA PRATO, G.; ZABCZYK, J. (2014). *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 152)
- [5] DALANG, R. C.; SANZ-SOLÉ, M. (2024). *Stochastic partial differential equations, space-time white noise and random fields* (en línia). <<https://arxiv.org/abs/2402.02119>>.
- [6] EINSTEIN, A. (1905). «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Annalen der Physik*, 322, p. 549-560.

- [7] EINSTEIN, A. (1949). *Autobiographisches*. Evanston: Library of Living Philosophers: Albert Einstein: Philosopher-Scientist.
- [8] FUNAKI, T. (1983). «Random motions of strings and related stochastic evolution equations». *Nagoya Math. J.*, 89, p. 129-193.
- [9] FÜRTH, R. (ed.) (1956). *Investigations on the theory of the Brownian movement, by Albert Einstein*. Traducció de A. D. COWPER. Mineola: Dover Publications.
- [10] HAIRER, M. (2013). «Solving the KPZ equation». *Annals of Mathematics*, 178 (2), p. 559-664.
- [11] KARDAR, M.; PARISI, G.; ZHANG, C. Y. (1986). «Dynamic Scaling of Growing Interfaces». *Phys. Rev. Lett.*, 56, p. 889-892.
- [12] ØKSENDAL, B. (1998). *Stochastic differential equations: An Introduction with applications*. Berlín: Heidelberg: Nova York: Springer-Verlag. (Universitext)
- [13] WALSH, J. B. (1986). «An introduction to stochastic partial differential equations». A: *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV-1984*. Berlín: Springer-Verlag, p. 265-439. (Lecture Notes in Mathematics; 1180)
- [14] WILKINSON, D. R.; EDWARDS, S. F. T. (1982). «The surface statistics of a granular aggregate». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, 381, p. 17-31.
- [15] Imatge de T. J. SULLIVAN, «Wiener process 3d», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wiener_process_3d.png>, sota llicència Creative Commons CC BY-SA 3.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>.
- [16] Imatge de D. REMENIK, «Integrable fluctuations in the KPZ universality class», a *International Congress of Mathematicians (ICM 2022)* (en línia), Berlín, EMS Press, 2023, p. 4426-4450, <<https://www.proceedings.com/content/074/074997webtoc.pdf>>, sota llicència Creative Commons CC BY-4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.
- [17] Imatge de T. WELLS, «Tetris gameplay reveals complex cognitive skills», a *Medical Xpress* (en línia), <https://medicalxpress.com/news/2019-10-tetris-gameplay-reveals-complex-cognitive.html#google_vignette>, de domini públic.
- [18] Imatge de BRANDENADS, «Typical Tetris Game», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Typical_Tetris_Game.svg>, de domini públic.
- [19] Imatge de PROKOFIEV, «Brownian surface», a *Wikimedia Commons* (en línia), <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brownian_surface.png>, sota llicència Creative Commons CC BY-SA 3.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>.

MONOGRAFIES DE LES SECCIONS DE CIÈNCIES

Títols publicats

- 1 Antoni MALET (cur.), *Obra d'Évariste Galois* (1984)
- 2 David JOU, *Introducció a la termodinàmica dels processos biològics* (1985)
- 3 Lluís GARCIA i SEVILLA, *Anàlisi de la psicoanàlisi* (1985)
- 4 UNIÓN INTERNACIONAL DE QUÍMICA PURA I APLICADA, *Compendi de nomenclatura de química analítica. Regles definitives de 1977* (1987)
- 5 Eduard PARÉS, *Vocabulari forestal* (1990; 2a ed., 1998)
- 6 Enric CASASSAS i Salvador ALEGRET (cur.), *Plasmes i focs* (1991)
- 7 Josep M. COSTA i Pere Lluís CABOT (cur.), *Glossari de corrosió* (1991)
- 8 Enric CASASSAS i Salvador ALEGRET (cur.), *Gasos i atmosferes* (1992)
- 9 Enric CASASSAS i Salvador ALEGRET (cur.), *Terra i sol* (1993)
- 10 Enric CASASSAS i Salvador ALEGRET (cur.), *Líquids i biofluids* (1993)
- 11 Juli G. PERETÓ i Salvador ALEGRET (cur.), *Els orígens* (1994)
- 12 Enric CASASSAS i Miquel ESTEBAN (cur.), *Modelització macroscòpia en ciències experimentals* (1996)
- 13 Enric CASASSAS i Romà TAULER (cur.), *Del plaer dels sentits al plaer de les xifres* (1997)
- 14 Salvador ALEGRET i Juli G. PERETÓ (cur.), *Fronteres de la ciència* (1997)
- 15 Juli G. PERETÓ i Salvador ALEGRET (cur.), *Llum i color* (2001)
- 16 David JOU, *El temps i la memòria en la ciència contemporània* (2001)
- 17 Jordi SANS, *L'evolució de l'ús del català en medicina a Catalunya durant el segle xx. El llarg camí d'una bella i expressiva història* (2002; 1a reimpr., 2004)
- 18 Mercè DURFORT, *Iniciació a les tècniques histològiques vegetals i animals i nota sobre les tècniques de transparentat* (2006)
- 19 Josep M. ROCA, *Tribut al mestre. Elogi a Santiago Ramón y Cajal = Tributo al maestro. Elogio a Santiago Ramón y Cajal* (2007)
- 20 Xavier CASAMITJANA, Jaume COLOMER, Elena ROGET, Xavier SÁNCHEZ, Teresa SERRA i Marianna SOLER, *La física de l'estany de Banyoles* (2009)
- 21 Ramon VIADER, *Vi, cos i cervell* (2011)
- 22 Alexandre RIBÓ, *Els bastiments menors catalans de construcció artesanal del segle xx* (2012)
- 23 Josep AMAT (dir.) i Josep Maria ESQUIROL (coord.), *Per una ètica pública a Catalunya. Implicacions ètiques i socials de la ciència i la tecnologia* (2016)
- 24 David JOU, *Una vida en deu equacions* (2024)
- 25 Antoni ROCA (coord.), *Einstein i l'actualitat de les seves contribucions* (2025)

Einstein i l'actualitat de les seves contribucions

Per commemorar el centenari del curs que Albert Einstein va impartir a Barcelona el 1923, l'Institut d'Estudis Catalans, l'entitat que l'havia convidat, organitzà una exposició al claustre de la seva seu a Barcelona, la Casa de Convalescència. L'exposició «100 anys d'Einstein a Catalunya» presentà, a més de l'impacte del curs de 1923, els elements més destacats de la trajectòria d'Einstein. L'exposició estigué oberta en dos períodes (entre el març i l'abril de 2023, i entre l'octubre de 2023 i el gener de 2024) i fou inaugurada i clausurada per dues jornades en què experts en diferents camps reflexionaren sobre la figura d'Einstein i l'actualitat de les seves contribucions en els àmbits de la física, l'astronomia, les matemàtiques i la història de la ciència. Tot i que les conferències estan disponibles al canal de vídeos de l'Institut d'Estudis Catalans, en aquest volum apleguem una versió més extensa de les intervencions de Carme Jordi, Luis Navarro Veguillas, Sebastià Xambó Descamps, Xavier Roqué i Marta Sanz-Solé.